MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

C. VI.
MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

ÍRTA:
DR. BAJCSAY PÁL

NEGYEDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1966

C. VI.

MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

ÍRTA:

DR. BAJCSAY PÁL

EGYETEMI DOCENS,

KANDIDÁTUS

NEGYEDIK KIADÁS

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. LOVASS-NAGY VIKTOR
OKL. GÉPÉSZMÉRNÖK,
A KHARTOUMI EGYETEM TANÁRA

DR. FARAGÓ TIBOR
EGYETEMI ADJUNKTUS



KIADÁSÁT
A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER
RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott, műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő alkalmazott műszaki anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

*Munkánk A. és B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák

* A sorozat címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szép számú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kollégа érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének* és *hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint— sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította

és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

A Műszaki Matematikai Gyakorlatok c. sorozat jelen kötetének összeállításánál az volt a fő cél, hogy ez a kötet a műszaki egyetemi hallgatóság számára hasznos segédeszköz legyen a már megtanult tananyag rövid és gyors átismétléséhez. Korlátozott terjedelménél fogva nem terjedhetett ki valamennyi kar speciális igényeinek a kielégítésére, s így több fejezet (mint pl. a parciális differenciálegyenletek, nomográfia elemei, operátorszámítás, valószínűségszámítás, matematikai statisztika) a keretén kívül rekedt. Felöleli azonban a legfontosabb fejezeteket. A szerző különösen gondolt az immár eléggé széles keretek közt folyó levelező oktatásra, s e terület hallgatóinak a matematika-záróvizsgára, a szigorlatra való felkészülését kívánta e képletgyűjteménnyel megkönnyíteni. E kötet természetesen nem pótolhatja az előadások és gyakorlatok jegyzeteit s az előírt vagy javasolt tankönyveket. Pusztán csak azokat kívánja kiegészíteni. Más részről viszont éppen az azok által való megfelelő kiegészítésre szorul.

E kötet szorosan illeszkedik a sorozat előző köteteihez, s az egyes kötetekre való utalások és hivatkozások csak azért hiányoznak, mert az egyes fejezetek fő címeinek a sorozat egyes köteteinek a címeivel való egybevetése úgyis azonnali eligazodást nyújt annak az olvasónak, aki további részleteket kíván átnézni épp e sorozat köteteiből.

Az egyes fejezetek nemcsak a fontosabb képleteket és képlettáblázatokat ölelik fel, hanem a fontosabb definíciókat, elnevezéseket és tételeket is. Ez ugyancsak segíteni fogja a tananyagnak a kötetből való átismétlését.

Köszönettel tartozom bírálóimnak, akik több értékes észrevételükkel segítettek munkámban.

Budapest, 1957. február 15.

Bajcsay Pál

ELŐSZÓ A KÖTET NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A kötet negyedik kiadása — néhány apróbb sajtóhiba helyreigazításától eltekintve — megegyezik az első, második és harmadik kiadással.

Budapest, 1966. április hó.

Bajcsay Pál

TARTALOMJEGYZÉK

I. Az ELEMI MATEMATIKA NÉHÁNY FONTOSABB ÖSSZEFÜGGÉSE ÉS TÉTELE

II. SZÁMSOROZATOK ÉS VÉGTELEN SOROK

III. A FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ FONTOSABB ALAPFOGALMAK

IV. AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK

V. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

VI. EGYENLETEK MEGOLDÁSA

VII. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

VIII. FÜGGVÉNYSOROK

IX. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

X. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

XI. SÍKGÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

XII. KOMPLEX SZÁMOK, KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

XIII. VEKTORALGEBRA, DETERMINÁNSOK, LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

XIV. A VEKTORANALÍZIS ELEMEI

XV. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

I. AZ ELEMI MATEMATIKA NÉHÁNY FONTOSABB ÖSSZEFÜGGÉSE ÉS TÉTELE

1. §. Aritmetika

1. A valós számokra vonatkozó fontosabb számolási szabályok

a) Összeadás:

$$a + b = b + a \text{ (kommutativitás);}$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (asszociativitás);}$$
$$a + 0 = a.$$

b) Kivonás: ha $a + c = b$, akkor ennek egyértelmű megfordításaként:

$$c = b - a.$$

c) Szorzás:

$$ab = ba \text{ (kommutativitás);}$$
$$a(bc) = (ab)c \text{ (asszociativitás);}$$
$$a(b + c) = ab + ac \text{ (disztributivitás);}$$
$$a \cdot 0 = 0; \qquad a \cdot 1 = a.$$

Egy szorzat akkor és csakis akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus.

d) Osztás: ha $ac = b$ és $a \neq 0$, akkor ennek egyértelmű megfordításaként:

$$c = \frac{b}{a}.$$

A zérussal való osztásnak nincs értelme: *zérussal osztani nem lehet!*

e) Egyenlőtlenségek:

Ha $a < b$, és $b < c$, akkor $a < c$.
Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$.
Ha $a < b$, és $c > 0$, akkor $ac < bc$; ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $ac > bc$.

Ha $0 < a < b$, akkor $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Ha $a \leqq b$, és $c \leqq d$, akkor $a + c \leqq b + d$.
Ha $a < b$, és $c > d$, akkor $a - c < b - d$.
Ha $a < b$, és $c < d$, akkor $ac \leqq bd$, feltéve, hogy $b \geqq 0$, és $c \geqq 0$.

2. Az abszolút érték

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0, \\ 0, & \text{ha } a = 0, \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

$$|ab| = |a|\,|b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$|a| - |b| \leqq \big||a| - |b|\big| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|.$$

3. Az előjel

Az a szám előjelét $\operatorname{sgn} a$-val jelöljük (olvasd: szignum a), és a következő meghatározás alapján állapítjuk meg:

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} +1, & \text{ha} \quad a > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad a = 0, \\ -1, & \text{ha} \quad a < 0. \end{cases}$$

Mindig fennáll, hogy $a = \operatorname{sgn} a \cdot |a|$ és $|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a$; ezzel szemben $\operatorname{sgn} a = \dfrac{a}{|a|}$ csak akkor, ha $a \neq 0$.

4. Középértékek

a) Számtani (aritmetikai) középérték:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

b) Mértani (geometriai) középérték:

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n}$. (Feltesszük azt, hogy valamennyi $x_i > 0$.) Fennáll, hogy

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

5. Számtani (aritmetikai) és mértani (geometriai) haladvány összege

a) $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1) d] =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = an + \frac{1}{2} n (n - 1) d.$$

b) $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

6. A faktoriális

$0! = 1$; $1! = 1$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1) n$, ahol $n > 0$ és egész szám.

7. A binomiális együtthatók

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n;$$

ha p pozitív és egész, akkor

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}.$$

Legyen n is pozitív és egész, akkor

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n - p)!} = \binom{n}{n - p}; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p - 1} = \binom{n + 1}{p}.$$

8. A binomiális tétel

Legyen $n > 0$ és egész, a és b tetszőleges; akkor

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

A binomiális együtthatók szimmetrikus táblázata *(Pascal-féle háromszög)*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

. . . .

9. Bernoulli-féle egyenlőtlenség

Legyen $n > 1$ és egész, továbbá $1 + x > 0$, akkor

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

2. §. Analitikus geometria a síkban

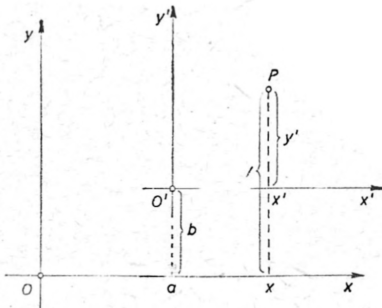
1. Távolság

a) A $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ *pontok távolsága:*

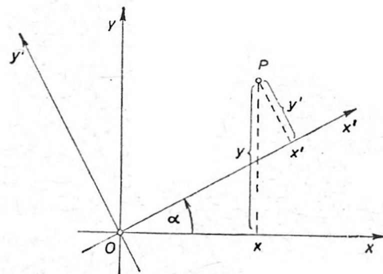
$$|\overline{P_1P_2}| = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

b) A P_1P_2 távolságot $m : n = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ arányban osztó pont koordinátái:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}.$$



1. ábra



2. ábra

2. Koordináta-rendszer transzformációja

a) Párhuzamos eltolás (1. ábra):

$$x = a + x',$$
$$y = b + y';$$
$$x' = x - a,$$
$$y' = y - b.$$

b) Origo körüli elforgatás (2. ábra):

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha;$$
$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$
$$y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

3. Egyenes egyenletei

a) Általános alak:

$$Ax + By + C = 0,$$

vagy ha $B \neq 0$, akkor ebből:

$$y = mx + b.$$

$m = \operatorname{tg} \vartheta$ az egyenes ϑ irányszögének a tangense (iránytangens), b az y tengellyel való metszéspont ordinátája (3. ábra).

3. ábra

b) Tengelymetszetes alak (Salmon):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

ahol a és b a koordináta-tengelyeken levő metszetek.

c) Hesse-féle normál alak:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - l = 0.$$

Ha $P(x, y)$ egy tetszőleges, nem az egyenesen fekvő pont, akkor ennek az egyenestől való távolságát az

$$l(P) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - l$$

kifejezés abszolút értéke adja. Két pont (P_1 és P_2) az egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, ha $l(P_1)$ és $l(P_2)$ előjele azonos.

d) A $P_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő, m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

e) A $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

vagy másképpen írva:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Egyenesek metszése

a) Két egyenes *metszési szöge:*

$$\operatorname{tg} \omega = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm \frac{B_1 A_2 - B_2 A_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

A két egyenes *párhuzamos,* ha $m_1 = m_2$, vagy $B_1 A_2 - B_2 A_1 = 0$.

A két egyenes *merőleges,* ha $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, vagy $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

b) Az

$$A_k x + B_k y + C_k = 0 \quad (\text{ahol } k = 1, 2, 3)$$

egyenletű egyenesek egy pontban metszik egymást, ha

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Háromszög területe

A $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ csúcspontok által meghatározott háromszög területe, ha a háromszöget P_1, P_2, P_3 sorrendben körüljárva a háromszöglap bal kéz felé esik:

$$T_\triangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Másodrendű görbék egyenletének kanonikus alakja

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *ellipszis*; $a = b = r$ esetében *kör*:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *hiperbola*; $a = b$ esetén ún. egyenlő szárú hiperbola.

c) $y^2 = 2\,px$, vagy $y = ax^2$, *parabola*.

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, egyetlen egy *pont* ($x = 0$, $y = 0$ koordinátákkal).

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, *két egymást metsző egyenes*.

f) $\frac{x^2}{a^2} = 1$, *két párhuzamos egyenes*.

g) $\frac{x^2}{a^2} = 0$, *egyetlen egyenes*.

Megjegyzés. Az

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0$$

egyenlet egy másodrendű görbét határoz meg. A koordináta-rendszer alkalmas elforgatásával és párhuzamos eltolásával ez az egyenlet kanonikus alakra hozható.

3. §. Analitikus geometria a térben

1. Távolság

A $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *pontok távolsága*:

$$\overline{P_1P_2} = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

2. Egyenes egyenletrendszere

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ és $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

3. Sík egyenlete

a) Általános alak:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

b) Tengelymetszetes alak:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

ahol a, b, c a koordináta-tengelyeken levő metszetek.

c) Hesse-féle normál alak:

$$\frac{A}{E}x + \frac{B}{E}y + \frac{C}{E}z + \frac{D}{E} = 0, \quad \text{ahol} \quad E = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

$\left|\frac{D}{E}\right|$ az origónak a síktól való távolsága.

4. Két sík hajlásszöge

$$\cos \omega = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

A két sík *párhuzamos*, ha

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

A két sík *merőleges*, ha

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

5. Másodrendű felületek egyenletének kanonikus alakja

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, *ellipszoid*; $a = b = c = r$ esetén *gömb*: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, *egyköpenyű hiperboloid.*

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, *kétköpenyű hiperboloid.*

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, *kúp.*

e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, *egyetlen pont* ($x = 0, y = 0, z = 0$ koordinátákkal).

f) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, *elliptikus paraboloid.*

g) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, *hiperbolikus paraboloid.*

h) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *elliptikus henger.*

i) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *hiperbolikus henger.*

j) $y = \frac{x^2}{a^2}$, *parabolikus henger.*

k) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, *metsződő síkpár.*

l) $\frac{x^2}{a^2} = 1$, *párhuzamos síkpár.*

m) $\frac{x^2}{a^2} = 0$, *egyetlen sík.*

Megjegyzés. Az

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} xz + 2 a_{23} yz + \\ + 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + 2 a_{34} z + a_{44} = 0$$

egyenlet egy másodrendű felületet határoz meg. A koordináta-rendszer alkalmas elforgatásával és párhuzamos eltolásával ez az egyenlet kanonikus alakra hozható.

II. SZÁMSOROZATOK ÉS VÉGTELEN SOROK

1. §. Számsorozatok

1. Definíció A valós számoknak

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

sorozatával állunk szemben, ha egy utasítás a valós számok közül egyet mint elsőt, ugyanazt vagy egy másikat mint másodikat és így tovább ad meg. Az így kiragadott számok a *sorozat elemei*; az n-edik az ún. *általános elem*.

E sorozatot sokszor (a_n)-nel, vagyis általános elemének zárójelbe foglalásával jelöljük. Máskor egyszerűen a sorozat elejét írjuk fel.

2. Korlát és határ Egy sorozat *korlátos*, ha valamennyi eleme a számegyenes két rögzített $k < K$ száma közé, esetleg ezekkel részben egybeesik. A k a sorozatnak egyik *alsó korlátja*, a K pedig egyik *felső korlátja*. Ha a sorozat korlátos, és k egyik alsó, K pedig egyik felső korlátja, akkor minden k-nál nem nagyobb szám alsó korlát, és minden K-nál nem kisebb szám felső korlát.

A sorozat *h alsó határa* a legnagyobb alsó korlát; *H felső határa* pedig a legkisebb felső korlát. Ha tehát ε egy tetszés szerinti kicsiny pozitív szám, akkor h még alsó korlát, de már $h + \varepsilon$ nem; hasonlóan H még felső korlát, de már $H - \varepsilon$ nem.

3. Sűrűsödési érték; határérték Az a szám egy számsorozat *sűrűsödési értéke*, ha az a minden tetszés szerinti (kicsiny) teljes ε-környezetébe [azaz az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallum belsejébe] a sorozat végtelen sok eleme esik.

Minden korlátos végtelen sorozatnak legalább egy sűrűsödési értéke van *(Bolzano és Weierstrass tétele)*.

Az egyetlenegy helyen sűrűsödő korlátos sorozat *konvergens, összetartó*; sűrűsödési értéke a *sorozat határértéke, limesze*. Minden más esetben a sorozat *divergens, széttartó*.

Ha az (a_n) sorozat összetartó, és határértéke a, akkor minden előre megadott tetszés szerinti (kicsiny) pozitív ε számhoz található egy-egy N természetes szám (küszöbszám) úgy, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad n > N.$$

Megfordítva: ha e feltétel teljesül, akkor a sorozat összetartó, és határértéke a. Jelekben:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

vagy

$$a_n \to a, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

4. Fontosabb tételek

a) Összetartó sorozat korlátos.

b) Összetartó sorozat minden végtelen részletsorozata is összetartó. Határértéke az eredeti sorozat határértéke.

c) Egy sorozat összetartásánál, sőt határértékénél véges számú elem megváltoztatása, elhagyása, beszúrása, egyáltalán a sorozat „eleje" nem játszik szerepet.

d) Ha $a_n \leqq c_n \leqq b_n$, továbbá a_n és b_n egy és ugyanazon határértékhez tart, akkor a közrefogott c_n is ugyanezen értékhez, mint határértékhez tart.

e) Ha $a_n \to 0$, akkor egyszersmind

$$|a_n| \to 0 \quad \text{és} \quad ca_n \to 0,$$

ahol c = állandó.

5. Cauchy-féle konvergencia-kritérium

Egy (a_n) sorozat akkor és csakis akkor összetartó, ha minden tetszés szerinti (kicsiny) pozitív ε-hoz található egy-egy N küszöbszám úgy, hogy

$$|a_n - a_{n'}| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad n \text{ és } n' > N,$$

más szóval, ha a sorozatban elegendő messze menve, tehát véges számú elemre nem nézve, a sorozat bármely két eleme egymáshoz előírtan közel esik.

6. A monotonitás tétele

Monoton (nem csökkenő, illetve nem növekvő) sorozat akkor és csakis akkor összetartó, ha korlátos. Valamely *monoton növekvő* ($a_i \leqq a_{i+1}$) korlátos sorozat határértéke egyenlő felső határával (legkisebb felső korlátjával).

Valamely *monoton csökkenő* ($a_i \geqq a_{i+1}$) korlátos sorozat határértéke egyenlő alsó határával (legnagyobb alsó korlátjával).

7. Határértékek számítására vonatkozó tételek

Ha

$$a_n \to a \quad \text{és} \quad b_n \to b,$$

akkor

$$a_n \pm b_n \to a \pm b,$$
$$a_n b_n \to ab,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad (\text{hacsak itt } b_n \neq 0,\ b \neq 0);$$

$$a_n \to \infty, \quad \text{ha} \quad \frac{1}{a_n} \to 0.$$

2. §. Végtelen sorok

1. Definíció

Az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

végtelen soron részletösszegeinek

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

sorozatát értjük. Aszerint, amint e sorozat összetartó, illetve széttartó, a sort is összetartónak, illetve széttartónak nevezzük. *Összetartó sor összegén* részletösszegei (s_n) sorozatának s határértékét értjük:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s.$$

2. Cauchy konvergencia-kritériuma

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csakis akkor konvergens, ha minden tetszőleges (kicsiny) pozitív ε-hoz található egy-egy N küszöbszám úgy, hogy

$$|s_{n+j} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+j}| < \varepsilon,$$

hacsak $n > N$, bármely természetes szám is a j, más szóval, ha az ε-tól függő N helyen túl a sor bármely véges szakasza abszolút értékre nézve a megadott ε-nál kisebb.

Gyakorlatilag az ε hibahatáron belül a teljes összetartó sor N-edik részletösszegével pótolható:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \approx a_1 + a_2 + \ldots + a_N.$$

3. Néhány fontosabb tétel

a) Egy végtelen sor összetartására nézve a sor eleje, véges számú tag megváltoztatása, beszúrása, elhagyása szerepet nem játszik.

b) Ha egy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor tagjainak abszolút értékéből alkotott $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor összetartó, akkor az eredeti sor is összetartó. *(Abszolút összetartó sor.)*

c) A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ún. *harmonikus sor* széttartó.

d) Minden *alternáló, váltakozó előjelű sor* összetartó, feltéve, hogy a tagok abszolút értéke monoton csökkenően a zérushoz tart. *(Leibniz-féle szabály.)*

e) Egy összetartó sor tagjai szükségképpen a zérushoz tartanak. Vagyis ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor összetartó, akkor

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Ez a feltétel a konvergenciának *szükséges, de nem elégséges feltétele.*

f) A $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ún. *geometriai sor* az $|x| \geqq 1$ esetben széttartó, míg $|x| < 1$ esetén összetartó.

g) Pozitív tagú sor akkor és csakis akkor összetartó, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

h) Ha $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ egy összetartó, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ pedig egy széttartó pozitív tagú sor, akkor az ugyancsak pozitív tagú $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor

$a_k \leqq b_k$ esetén összetartó, $a_k \geqq c_k$ esetén széttartó. *(Összehasonlító kritérium.)*

i) Ha egy pozitív tagú $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sornál van oly a szám, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq a < 1, \text{ akkor a sor összetartó,}$$

ha ellenben

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1, \text{ akkor a sor széttartó. } \textit{(Hányados-kritérium.)}$$

4. Műveletek végtelen sorokkal

a) Összetartó sorban az összeg megváltoztatása nélkül zárójelezhetünk.

b) Két összetartó sor lineárisan kombinálható:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k + c'a'_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k + c' \sum_{k=1}^{\infty} a'_k.$$

c) Abszolút konvergens sorban a tagok sorrendje felcserélhető. *(Dirichlet.)*

d) Egy csupán közönséges értelemben (tehát nem abszolút) konvergens sor bármely előre megadott összegű konvergens sorba átrendezhető. *(Riemann.)*

III. A FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ FONTOSABB ALAPFOGALMAK

1. §. Változó és függvény

1. Változó és intervallum

a) *Változónak* nevezzük azt a mennyiséget, mely különböző számértékeket vehet fel; az x változót jelent, ha nem egyetlen meghatározott számértéket jelöl, hanem — bizonyos meghatározott utasítás alapján — vesz fel különböző számértékeket.

b) Ha az x változó az a és b számok között minden számértéket felvehet, akkor azt mondjuk, hogy x folytonos változó az *a . . . b intervallumban (számközben)*. Ha x az intervallum határát képező a és b számértékeket nem veheti fel, azaz

$$a < x < b,$$

akkor az intervallum *nyitott*, ha ezeket az értékeket is felveheti, azaz

$$a \leqq x \leqq b,$$

akkor az intervallum *zárt*.

c) Előfordulhat, hogy az x változó nem folytonos; ez esetben az x változó egy, az intervallumhoz tartozó számsorozat egymástól meghatározott módon különböző elemeinek megfelelő számértékeket veheti csak fel.

d) A változótól megkülönböztetésül azt a számot, melynek meghatározott, rögzített számértéke van, *állandónak (constans)* nevezzük.

2. A függvény

a) Ha az x változó minden megengedett értékéhez az y változónak meghatározott értékét (vagy esetleg értékeit) rendeljük hozzá, akkor azt mondjuk, hogy y *függvénye* az x-nek:

$$y = f(x), \quad \text{vagy} \quad y = y(x).$$

b) Az $y = f(x)$ függvénykapcsolatban x a *független változó*, y a *függő változó* (röviden *függvény*), az f pedig a két változó közt fennálló, vagy előírt *függvénykapcsolat* módját jelöli.

c) Az x változónak azt az intervallumát (változási tartományát), melyben a függvény értelmezve van (melyben a független változó „megengedett" értékei fekszenek), *értelmezési tartománynak* nevezzük. Az értelmezési tartomány összes x értékeihez hozzárendelt különböző y értékek összessége alkotja a függvény *értékkészletét*.

d) Ha az $y = f(x)$ függvényben minden szóba jöhető x értékhez csak egy meghatározott y érték tartozik, akkor a függvény *egyértékű*; különben *többértékű*.

3. A függvény megadása

Az x és y változók közti függvénykapcsolatot *képlettel*, *grafikonnal (ábrával)* vagy *táblázattal* szokás megadni. A legáltalánosabb a képlettel való megadási mód.

Képlettel való megadás esetében:
ha a képletből az y függő változót kifejezzük:

$$y = f(x),$$

akkor a függvényt *explicitnek* nevezzük;
ellenkező esetben a függvényt *implicitnek* nevezzük:

$$F(x, y) = 0;$$

végül előfordulhat, hogy az x és y közti függvénykapcsolatot egy paraméter közvetíti:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

(paraméteres megadás).

4. Inverz függvény

Ha az $y = f(x)$ függvényben a két változót felcseréljük: $x = f(y)$, az y-t tekintjük függő változónak, x-et pedig független változónak, és y-t kifejezzük: $y = g(x)$, akkor ezt az új függvényt az eredeti függvény *inverzének* tekintjük:

Az eredeti függvény: $y = f(x)$,
az inverz függvény implicit alakja: $x = f(y)$,
az inverz függvény explicit alakja: $y = g(x)$.

5. Algebrai és transzcendens függvény

A

$$p_0(x) + p_1(x)\,y + p_2(x)\,y^2 + \ldots + p_n(x)\,y^n = 0$$

egyenlet alakjában megadott függvényeket, feltéve, hogy $p_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ az x független változó tetszőleges polinomja, *algebrai függvényeknek* nevezzük. Minden egyéb, nem algebrai függvényt *transzcendesnek* nevezünk.

6. Páros és páratlan függvények

Az $y = f(x)$ függvényt *párosnak* nevezzük, ha

$$f(-x) = f(x),$$

vagyis, ha az azonos abszolút értékű x-ekhez azonos függvényértékek tartoznak.

Az $y = f(x)$ függvényt *páratlannak* nevezzük, ha

$$f(-x) = -f(x),$$

vagyis, ha a függvényérték a független változóval együtt előjelet vált. Azonos abszolút értékű, de ellenkező előjelű x-ekhez azonos abszolút értékű, de ellenkező előjelű függvényértékek tartoznak.

Minden olyan függvény, mely sem nem páros, sem nem páratlan, felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left\{f(x) + f(-x)\right\}}_{\text{páros}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left\{f(x) - f(-x)\right\}}_{\text{páratlan}}.$$

7. Periodicitás

Az $f(x)$ függvény p *szerint periodikus,* ha

$$f(x + p) = f(x).$$

A *periódus,* vagyis az *ismétlődés szakasza* éppen p.

8. Monotonitás; korlátosság

a) Az $a \ldots b$ (zárt vagy nyitott) intervallumban értelmezett $y = f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy ott *monoton növekvő,* ha az intervallum bármely két $x_1 < x_2$ helyére fennáll, hogy $f(x_1) \leqq f(x_2)$. Megfordítva, ha $x_1 < x_2$, esetén $f(x_1) \geqq (x_2)$, akkor $f(x)$ *monoton csökkenő.*

b) Az $a \ldots b$ intervallumban értelmezett függvényről akkor mondjuk, hogy ott *korlátos,* ha megadható egy olyan $K > 0$ szám, hogy az intervallum minden x helyére fennáll, hogy $|f(x)| \leqq K$. K a függvény *korlátja.*

$f(x)$ *alulról korlátos,* ha $f(x) \geqq L$, minden x-re;
$f(x)$ *felülről korlátos,* ha $f(x) \leqq M$, minden x-re.
L a függvény *alsó korlátja* és M a függvény *felső korlátja.*

2. §. Függvény határértéke

1. A független változó határértéke

a) Az x független változó a rögzített (állandó) ξ érték felé tart (konvergál), vagy *határértéke (limesze)* ξ akkor, ha x a ξ értéket tetszés szerint megközelíti, de fel nem veszi. Jelekben:

$$x \to \xi, \quad \text{vagy} \quad \lim x = \xi.$$

Ebben az esetben bármilyen kicsiny, tetszőleges, előre megadott pozitív ε mellett fennáll, hogy

$$0 < |x - \xi| < \varepsilon.$$

b) Az $x \to \xi$ határátmenetet az előbbin kívül még kétféleképpen is gondolhatjuk: vagy úgy, hogy miközben x tart ξ-hez, közben állandóan $x > \xi$, vagy úgy, hogy $x < \xi$. Az első esetben x *jobbról* tart ξ-hez:

$$x \to \xi + 0;$$

a második esetben x *balról* tart ξ-hez:

$$x \to \xi - 0.$$

c) $x \to +0$ azt jelenti, hogy $x > 0$ és bármilyen kicsiny is az előre megadott pozitív ε, $x < \varepsilon$; $x \to -0$ azt jelenti, hogy $x < 0$ és bármilyen kicsiny is az előre megadott pozitív ε, $|x| < \varepsilon$.

$x \to +\infty$ azt jelenti, hogy $x > \omega$, ahol $\omega > 0$ előírtan nagy;
$x \to -\infty$ azt jelenti, hogy $x < -\omega$, ahol $\omega > 0$ előírtan nagy.

2. Függvény határértéke

a) Az $y = f(x)$ függvény az $x \to \xi$ határátmenet mellett a G *határértékhez tart,* jelekben

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = G,$$

vagy

$$f(x) \to G, \quad \text{ha} \quad x \to \xi,$$

hogyha bármely tetszés szerinti (kicsiny) pozitív ε-hoz található egy olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (kicsiny) szám úgy, hogy

$$|f(x) - G| < \varepsilon$$

legyen, hacsak $0 < |x - \xi| < \delta$.

b) *Jobboldali határérték:* $\lim\limits_{x \to \xi + 0} f(x) = G^{+}$.

Baloldali határérték: $\lim\limits_{x \to \xi + 0} f(x) = G^{-}$.

A szó szoros értelmében határértékről akkor beszélünk, ha a jobb- és baloldali határérték megegyzik: $G^{+} = G^{-} = G$, tehát amikor a határérték független a határátmenet módjától.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = G$ azt jelenti, hogy $|f(x) - G| < \varepsilon$, hacsak $x > \omega$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = G$ azt jelenti, hogy $|f(x) - G| < \varepsilon$, hacsak $x < -\omega$,

ahol $0 < \varepsilon$ előírtan kicsiny, és $\omega > 0$ elegendő nagy.

d) $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = +\infty$ azt jelenti, hogy $f(x) > \omega$, hacsak $|x - \xi| < \delta$,

$\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = -\infty$ azt jelenti, hogy $f(x) < -\omega$, hacsak $|x - \xi| < \delta$,

ahol $\omega > 0$ előírtan nagy és $\delta > 0$ elengedő kicsiny.

3. A határértékekre vonatkozó néhány tétel

a) Ha az $f(x)$ függvény az $a \leqq x < \xi$ intervallumban monoton növekvő és felülről korlátos, azaz $f(x) \leqq M$, akkor van baloldali határértéke:

$$\lim_{x \to \xi - 0} f(x) = G^{-} \leqq M.$$

Itt G^{-} a függvény legkisebb felső korlátja.

Ha az $f(x)$ függvény az $a \leqq x < \xi$ intervallumban monoton növekvő, és **nem korlátos**, akkor

$$\lim_{x \to \xi - 0} f(x) = +\infty.$$

Ha az $f(x)$ függvény az $a \leqq x < \xi$ intervallumban monoton csökken, és **alulról** korlátos, azaz $f(x) \geqq L$, akkor van baloldali határértéke:

$$\lim_{x \to \xi - 0} f(x) = G^{-} \geqq L.$$

Itt G^{-} a függvény legnagyobb alsó korlátja.

Ha $f(x)$ monoton csökken, és nem korlátos, akkor

$$\lim_{x \to \xi - 0} f(x) = -\infty.$$

b) Ha $f(x)$ a $\xi < x \leqq b$ intervallumban csökkenő x-ek esetén monton növekszik (csökken), és felülről (alulról) korlátos, akkor van jobboldali határértéke:

$$\lim_{x \to \xi + 0} f(x) = G^{+}.$$

Itt G^{+} a legkisebb felső (legnagyobb alsó) korlát.

Ha $f(x)$ monoton növekszik (csökken) $x \to \xi + 0$ esetén, és nem korlátos, akkor

$$\lim_{x \to \xi + 0} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to \xi + 0} f(x) = -\infty \right).$$

c) Ha az $u(x)$ és $v(x)$ függvényeknek $x \to \xi$ esetén ugyanaz a G határértékük van, és

$$u(x) \leqq f(x) \leqq v(x)$$

minden olyan x-re, mely a

$$\xi - h \leqq x \leqq \xi + h \quad (0 < h = \text{állandó})$$

intervallumban van, akkor

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = G.$$

d) Ha $\lim\limits_{x \to \xi} u(x) = U$ és $\lim\limits_{x \to \xi} v(x) = V$, akkor

α) $\lim\limits_{x \to \xi} [u(x) \pm v(x)] = \lim\limits_{x \to \xi} u(x) \pm \lim\limits_{x \to \xi} v(x) = U \pm V$;

β) $\lim\limits_{x \to \xi} u(x) \cdot v(x) = \lim\limits_{x \to \xi} u(x) \cdot \lim\limits_{x \to \xi} v(x) = U \cdot V$;

γ) $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \xi} u(x)}{\lim\limits_{x \to \xi} v(x)} = \dfrac{U}{V}$, feltéve, hogy $v(x) \neq 0$ és $V \neq 0$.

3. §. A függvény folytonossága

1. Definíció

Az $y = f(x)$ függvény az $x = \xi$ helyen *folytonos,* ha $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ létezik és megegyzik az $f(\xi)$ függvényértékkel:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi).$$

Az $f(x)$ függvény az $a \ldots b$ intervallumban folytonos, ha az $a \ldots b$ intervallum minden helyén folytonos.

2. A folytonosságra vonatkozó néhány tétel

a) Ha az $u(x)$ és $v(x)$ függvények az $x = \xi$ helyen folytonosak, akkor itt $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ és $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ is folytonos, ez utóbbi persze csak akkor, ha $v(\xi) \neq 0$.

b) Legyen $f(x)$ az $x = \xi$ helyen folytonos és $f(\xi) \neq 0$. Ekkor a ξ helynek van egy olyan $\xi - h < x < \xi + h$ (ahol $h > 0$ elég kicsiny) környezete, melyben

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(\xi),$$

más szavakkal a ξ hely elegendő kicsiny környezetében a függvény előjele megegyezik $f(\xi)$ előjelével.

c) Legyen $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos, és legyen az intervallum két végpontjában ellenkező előjelű, azaz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ez esetben kell legyen $[a, b]$-ben legalább egy olyan ξ hely $(a < \xi < b)$, ahol $f(\xi) = 0$. *(Bolzano—Weierstrass tétele.)*

d) Ha a folytonos $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban sehol sem zérus, akkor ott mindenütt ugyanolyan előjelű.

e) Ha $f(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és $f(a) \neq f(b)$, akkor $f(x)$ legalább egy $a \leqq \xi \leqq b$ helyen felveszi az $f(a)$ és $f(b)$ közé eső bármelyik értéket.

f) Az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban nem korlátos $f(x)$ függvény ott nem mindenütt folytonos, tehát ha $f(x)$ nem korlátos, akkor kell legyen a zárt $[a, b]$ intervallumban legalább egy ξ hely, ahol $f(x)$ nem folytonos, azaz szakadása van.

g) Az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos $f(x)$ függvény korlátos, tehát van két olyan L és M szám, hogy

$$L \leqq f(x) \leqq M, \quad \text{hacsak} \quad a \leqq x \leqq b.$$

h) Ha $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos és L_0 a legnagyobb alsó korlátja (alsó határa), M_0 pedig a legkisebb felső korlátja (felső határa), akkor kell legyen $[a, b]$-ben legalább egy x_1 hely, ahol

$$f(x_1) = L_0$$

és legalább egy x_2 hely, ahol

$$f(x_2) = M.$$

i) Az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos $f(x)$ függvény felveszi $[a, b]$-ben a legnagyobb és legkisebb értékét. Az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos $f(x)$ függvény felső (illetve alsó) határa egyben $f(x)$-nek abszolút maximuma (illetve minimuma) ebben az intervallumban. (*Weierstrass tétele.*)

j) Ha $y = f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos és monoton, akkor van egy az $f(a) = y_a \leqq y \leqq y_b = f(b)$ intervallumban értelmezett egyértékű $x = f(y)$ *inverz függvény*, amely ott ugyanúgy folytonos és monoton növekszik vagy csökken aszerint, hogy $y = f(x)$ növekszik vagy csökken.

3. Jobb- és baloldali folytonosság; egyenletes és szakaszonkénti folytonosság

a) Az $f(x)$ függvény az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban *jobboldalt folytonos*, ha

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$$

és *bal oldalt folytonos*, ha

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

b) Egy zárt intervallumban folytonos $f(x)$ függvény ott *egyenletesen folytonos*, azaz bármely pozitív ε-hoz található egy pusztán az ε-tól függő δ szám úgy, hogy az intervallum két: a és x helyére nézve

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |x - a| < \delta,$$

minden a-ra egyaránt.

c) Egy véges intervallumban korlátos függvényt ott *szakaszonként folytonosnak* nevezünk, ha ez az intervallum véges számú olyan szakaszra bontható, amelynek belső pontjaiban a függvény folytonos, míg végpontjaiban csak bal-, illetve jobboldali határértékhez tart.

4. §. A függvény ábrázolása

1. Egyértékű, folytonos függvény képe

Az $y = f(x)$ egyértékű és folytonos függvény az (x, y) koordináta-rendszerben egy *folytonos görbét* határoz meg. E görbe egyes pontjainak koordinátái: $[x, f(x)]$.

2. Inverz függvény képe

Ha $y = g(x)$ az $y = f(x)$ függvény inverze, akkor képét az eredeti függvény képének az $y = x$ szögfelező egyenesre való tükrözésével kapjuk meg.

3. Páros és páratlan függvény képe

a) *Páros függvény* görbéje az y tengelyre szimmetrikus.
b) *Páratlan függvény* görbéje centrálisan szimmetrikus; a szimmetria centruma az origo.

4. Lineáris transzformáció

Az

$$\frac{y - a}{A} = f\left(\frac{x - b}{B}\right)$$

függvény görbéjét az $y = f(x)$ függvény görbéjéből a következőképpen lehet származtatni:

x irányban: B-szeres nyújtás és b-vel való eltolás;

y irányban: A-szoros nyújtás és a-val való eltolás.

(Ügyeljünk arra, hogy a nyújtás-eltolás sorrendet fel ne cseréljük!)

IV. AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK

1. §. Racionális egész függvények

1. Racionális egész függvény

Általános alakja egy *polinom:*

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

ahol az a_k együtthatók állandó számok. Ha $a_n \neq 0$, akkor n a *polinom fokszáma:* n-ed fokú polinom.

A függvény görbéje egy ún. *n-ed fokú parabola.*

2. Zérushelyek

Ha az n-ed fokú

$$y = p_n(x)$$

racionális egész függvény az $x = a$ helyen zérus, azaz

$$p_n(a) = 0,$$

akkor $p_n(x)$ maradék nélkül osztható az $(x - a)$ *gyöktényezővel:*

$$\frac{p_n(x)}{x - a} = p_{n-1}(x),$$

ahol $p_{n-1}(x)$ egy $(n - 1)$-ed fokú polinom.

Ha

$$p_n(x) = (x - a)^\alpha \quad p_{n-\alpha}(x),$$

ahol $p_{n-\alpha}(a) \neq 0$, akkor az $x = a$ hely a $p_n(x)$ polinom α-szoros zérushelye.

Minden n-ed fokú racionális egész függvénynek legfeljebb n valós zérushelye van (ha a zérushelyeket a többszörösségüknek megfelelően vesszük számításba).

3. Lagrange-féle interpolációs polinom

Az $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken megadott $y = y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ értékeket felvevő legfeljebb n-ed fokú racionális egész függvény:

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots$$

$$\ldots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

4. Newton-féle interpolációs polinom

a) Az $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ helyeken a megadott $y = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ értékeket felvevő legfeljebb n-ed fokú polinom:

$$y = y_0 + g_1(x_1)(x - x_0) + g_2(x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + g_n(x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

ahol a $g_1(x_1)$, $g_2(x_2)$, ..., $g_n(x_n)$ együtthatókat az alábbi táblázatból lehet egyszerűen meghatározni:

x_0	y_0					
x_1	y_1	$g_1(x_1)$				
x_2	y_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$			
x_3	y_3	$g_1(x_3)$	$g_2(x_3)$	$g_3(x_3)$		
.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.		
.	.	.	.	.		
x_n	y_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	$g_3(x_n)$	...	$g_n(x_n)$

Ebben a táblázatban mindegyik — a függőlegestől jobbra fekvő — oszlopban (az első kivételével) a tőle balra fekvő oszlopban és vele egy sorban álló számnak és ugyanezen oszlop legfelső számának a különbsége áll, osztva a megfelelő sorokban álló abszcisszák különbségével:

$$g_i(x_j) = \frac{g_{i-1}(x_j) - g_{i-1}(x_{i-1})}{x_j - x_{i-1}}, \text{ ahol } i \leqq j, \text{ és } i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

speciálisan $g_0(x_j) = y_j$.

b) Ha a független változó megadott értékeinek növekvő sorozatában két-két szomszédos érték különbsége állandó, azaz $x_{i+1} - x_i = h$, minden i-re (*aequidistans argumentum értékek* esetén), amikoris $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, akkor

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

ahol a Δy_0, $\Delta^2 y_0$, ..., $\Delta^n y_0$ *függvénydifferenciákat* a következő táblázatból lehet kiolvasni:

x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	.
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	.	
		Δy_3	.		
x_4	y_4	.			
.	.				
.	.				
.	.				

ahol

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

és

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, 2 \ldots, n-1; \; k = 2, 3, \ldots, n.$$

2. §. Racionális tört függvények

1. Racionális tört függvény

a) Általános alakja két polinom hányadosa:

$$y = R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}.$$

A racionális tört függvényt *valódi tört* függvénynek nevezzük, ha a számlálóban levő $p_n(x)$ polinom alacsonyabb fokszámú, mint a nevezőben levő $q_m(x)$ polinom, azaz $n < m$; ha azonban $n \geqq m$, akkor $R(x)$ *áltört* függvény. Ez utóbbi esetben — osztás útján — $R(x)$ felbontható egy racionális egész függvénynek és egy valódi tört függvénynek az összegére.

b) $R(x)$ mindenütt értelmezve van és folytonos, ahol $q_m(x) \neq 0$. Mindenütt, ahol $R(x)$ nevezőjének zérushelye van, az $R(x)$ függvény nincs értelmezve, ezek a helyek a függvény *szakadási helyei*.

2. Zérushelyek

Az

$$R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

racionális tört függvény zérus az $x = a$ helyen, ha

$$p_n(a) = 0 \quad \text{és} \quad q_m(a) \neq 0.$$

Ha $x = a$ a $p_n(x)$-nek α-szoros zérushelye, és $q_m(a) \neq 0$, akkor $x = a$ az $R(x)$-nek is α-szoros zérushelye.

3. Pólus

Az $R(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ racionális tört függvénynek az $x = a$ helyen μ-ed rendű pólusa van, ha

a) $x = a$ a $q_m(x)$-nek μ-szeres zérushelye és $p_n(a) \neq 0$,

b) $x = a$ a $q_m(x)$-nek $(\nu + \mu)$-szeres és $p_n(x)$-nek ν-szeres zérushelye. Ekkor az $R(x)$ függvény görbéjének az $x = a$ helyen függőleges aszimptotája van.

Ha $x = a$ az $R(x)$-nek μ-ed rendű póIushelye, akkor

$$\lim_{x \to a} |R(x)| = \infty;$$

továbbá

a) ha μ páros szám, akkor

$$\operatorname{sgn}\left[\lim_{x \to a-0} R(x)\right] = \operatorname{sgn}\left[\lim_{x \to a+0} R(x)\right],$$

b) ha μ páratlan szám, akkor

$$\operatorname{sgn}\left[\lim_{x \to a-0} R(x)\right] = -\operatorname{sgn}\left[\lim_{x \to a+0} R(x)\right].$$

4. Hézagpont, megszüntethető szingularitás

Ha $x = a$ a $p_n(x)$-nek ν-szeres és a $q_m(x)$-nek μ-szeres zérushelye, és $\mu \leqq \nu$, akkor az

$$R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

racionális tört függvényt ábrázoló görbének e helyen *hézagpontja* van. A függvény e pontban nincs értelmezve, azonban

$$\lim_{x\to a-0} R(x) = \lim_{x\to a+0} R(x) = \lim_{x\to a} R(x).$$

Ez a szingularitás megszüntethető azáltal, ha a függvényt a következőképpen egészítjük ki:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}, & \text{ha } x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}, & \text{ha } x = a. \end{cases}$$

5. A végtelenben való viselkedés

Legyen a vizsgált függvény

$$R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}.$$

a) Ha $n < m$, vagyis $R(x)$ valódi tört függvény, akkor

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to-\infty} R(x) = 0,$$

vagyis az x tengely az $R(x)$ függvény görbéjének az aszimptotája.

b) Ha $n \geqq m$, vagyis $R(x)$ áltört függvény, akkor

$$R(x) = p_{n-m}(x) + \frac{p_{m-1}(x)}{q_m(x)},$$

ahol

$$\frac{p_{m-1}(x)}{q_m(x)} = r(x)$$

egy valódi tört függvény. Ebben az esetben

$$\lim_{x\to\infty}[R(x) - p_{n-m}(x)] = \lim_{x\to-\infty}[R(x) - p_{n-m}(x)] = 0,$$

s így a $p_{n-m}(x)$ racionális egész függvény görbéje az $R(x)$ függvény görbéjének az aszimptotája.

6. Racionális tört függvény részlettörtekre való felbontása

Legyen $R(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$ egy valódi tört függvény $(n < m)$. A $q_m(x)$ (valós együtthatójú) polinom a valós zérushelyeknek megfelelő elsőfokú és a párosával fellépő komplex zérushelyeknek megfelelő másodfokú tényezők szorzataként a következőképpen írható fel:

$$q_m(x) = b_m(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots$$

$$\ldots(x - x_\tau)^{\alpha_\tau}(x^2 + 2B_1 x + C_1)^{\varrho_1}(x^2 + 2B_2 x + C_2)^{\varrho_2}\ldots(x^2 + 2B_\sigma x + C_\sigma)^{\varrho_\sigma},$$

ahol b_m a $q_m(x)$ polinom legmagasabb fokszámú tagjának az együtthatója, $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$ a $q_m(x)$ polinomnak α_1-, α_2-, ..., α_τ-szoros valós zérushelyei, $B_1, B_2, \ldots B_\sigma$, $C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$ valós számok, és

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\tau + 2(\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_\sigma) = m.$$

Az $R(x)$ függvény egy és csakis egyféleképpen, a nevező lineáris tényezőinek megfelelő

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{D_1}{x - x_\tau} + \frac{D_2}{(x - x_\tau)^2} + \ldots + \frac{D_{\alpha_\tau}}{(x - x_\tau)^{\alpha_\tau}}$$

és a másodfokú tényezőknek megfelelő

$$\frac{S_1 x + T_1}{x^2 + 2B_1 x + C_1} + \frac{S_2 x + T_2}{(x^2 + 2B_1 x + C_1)^2} + \ldots + \frac{S_{\varrho_1} x + T_{\varrho_1}}{(x^2 + 2B_1 x + C_1)^{\varrho_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{U_1 x + V_1}{x^2 + 2B_\sigma x + C_\sigma} + \frac{U_2 x + V_2}{(x^2 + 2B_\sigma x + C_\sigma)^2} + \ldots + \frac{U_{\varrho\sigma} x + V_{\varrho\sigma}}{(x^2 + 2B_\sigma x + C_\sigma)^{\varrho\sigma}}$$

ún. részlettörtek összegeként állítható elő, ahol

$$A_1, A_2, \ldots, D_1, D_2 \ldots, S_1, S_2 \ldots, T_1, T_2, \ldots, U_1, U_2, \ldots, V_1, V_2, \ldots$$

valós állandókat jelentenek.

Ezeket a részlettörtek számlálóiban szereplő állandókat a részlettörtek közös nevezőre hozása és az eredeti $R(x)$ függvénnyel való összehasonlítás útján lehet meghatározni (határozatlan együtthatók módszere).

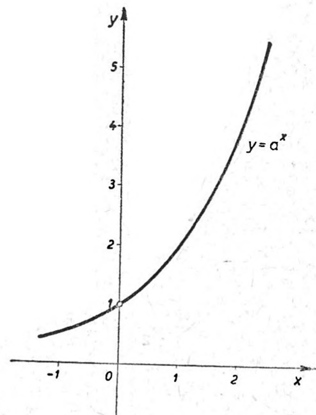
3. §. Exponenciális függvények

Definíció és fontosabb összefüggések

Általános alak:

$$y = a^x, \text{ ahol}$$

$$1 \neq a > 0. \quad (4. \text{ ábra})$$



4. ábra

Fennállanak a következő fontosabb

a) összefüggések:

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}; \quad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2};$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}; \quad a^0 = 1; \quad a^1 = a;$$

b) és *határértékek:*

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x\,!} = 0; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!}\right) = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$$

Az $y = a^x$ függvénynek nincs zérushelye: $a^x > 0$, minden x-re.

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0; \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty.$$

Az e alapú exponenciális függvény:

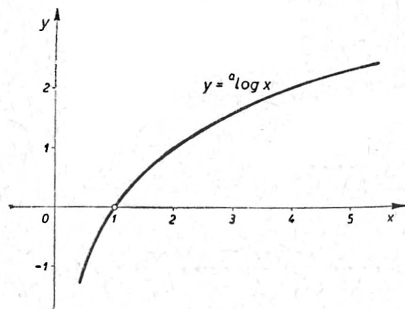
$$y = e^x.$$

4. §. A logaritmusfüggvény

1. Definíció

Az a alapú logaritmusfüggvény ($1 \neq a > 0$) az a alapú exponenciális függvény inverze (5. ábra):

$$\text{ha } y = {}^a\log x, \text{ akkor } a^y = x.$$



5. ábra

Értelmezési tartomány: $0 < x < \infty$.

A *természetes logaritmusok (logaritmus naturalis)* alapszáma e:

$$\text{ha } y = \ln x = {}^e\log x, \text{ akkor } e^y = x.$$

A *közönséges* vagy *Briggs-féle logaritmusok* alapszáma 10:

$$\text{ha } y = \lg x = {}^{10}\log x, \text{ akkor } 10^y = x.$$

Az a és b alapú logaritmusok átszámítása a következőképpen történik:

$${}^a\log x = \frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}.$$

Pl.

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$$

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\ 29\ldots$$

2. Fontosabb összefüggések

$${}^a\log (x_1 x_2) = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2;$$

$${}^a\log \frac{x_1}{x_2} = {}^a\log x_1 - {}^a\log x_2; \quad {}^a\log (x_1^{x_2}) = x_2\, {}^a\log x_1; \quad {}^a\log 1 = 0;$$

$${}^a\log a = 1;$$

$${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a};$$

$$a^{{}^a\log x} = x; \quad {}^a\log (a^x) = x.$$

5. §. Trigonometrikus függvények

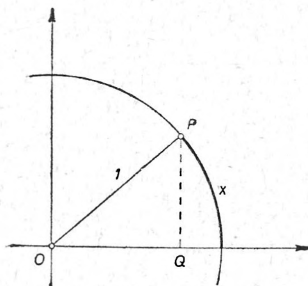
1. Szög ívmértéke

A φ középponti szöghöz tartozó és az egységsugarú körön fekvő ív hossza: $x = \text{arc}\,\varphi$. Az egységnyi ívhosszhoz tartozó középponti szög az egységsugarú körben 1 *radián*. Tetszés szerinti sugarú körben:

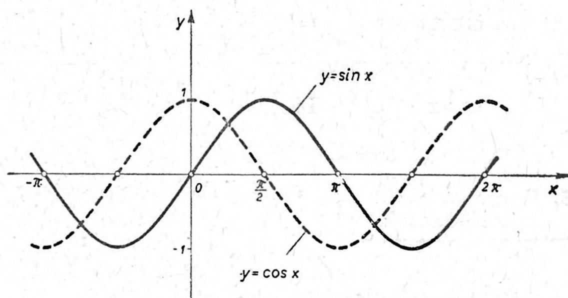
$$\text{arc}\,\varphi = \frac{\varphi \text{ középponti szöghöz tartozó ívhossz}}{\text{sugárhossz}} \text{ radián.}$$

A fokok és radiánok közti átszámítás:

$$\text{arc}\,\varphi = \frac{\pi}{180^\circ}\varphi^\circ, \quad \text{illetve} \quad \varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\text{arc}\,\varphi.$$



6. ábra



7. ábra

2. Trigonometrikus függvények definíciója

A trigonometrikus függvényeket az egységsugarú körben (6. ábra) a következőképpen definiáljuk:

$\sin x = \overline{QP}$ = az egységsugarú kör P pontjának az ordinátája;

$\cos x = \overline{OQ}$ = az egységsugarú kör P pontjának az abszcisszája;

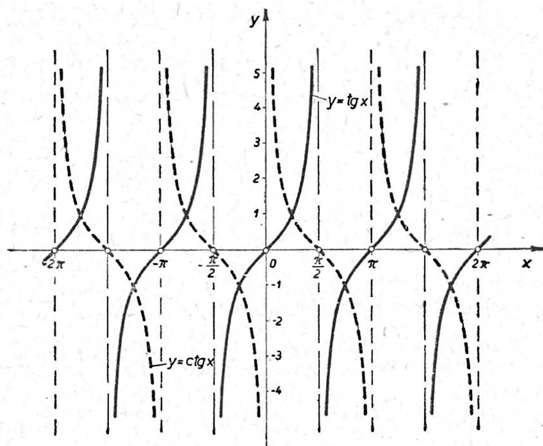
$$\text{tg}\,x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

hacsak $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\text{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{hacsak } x \neq k\pi,$$

ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (7. és 8. ábra), $\sin x$ és $\cos x$ minden x-nél értelmezett. $\text{tg}\,x$ az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken és $\text{ctg}\,x$ za $x = k\pi$ helyeken nincs értelmezve ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).



8. ábra

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1, \quad -1 \leqq \cos x \leqq 1;$$
$$-\infty < \operatorname{tg} x < \infty, \quad -\infty < \operatorname{ctg} x < \infty.$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

A nevezetes szögek szinusza és koszinusza a következő táblázatból egyszerűen megjegyezhető:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

3. Fontosabb összefüggések

a) Definiáló összefüggések:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

b) Reciprok összefüggések:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

c) Pythagoras tételéből következő összefüggés:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

d) Összeg- és különbség-szögek függvényei:

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v,$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v,$$

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v},$$

$$\operatorname{ctg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{ctg} u \cdot \operatorname{ctg} v \mp 1}{\operatorname{ctg} v \pm \operatorname{ctg} u}.$$

e) Kétszeres és félszögek függvényei:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$$

f) Szögfüggvények négyzeteinek kifejezése:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}.$$

g) Szögfüggvények összegének és különbségének szorzattá alakítása:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}.$$

h) Szögfüggvények szorzatának összeggé alakítása:

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin (x + y) + \sin (x - y)],$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x + y) + \cos (x - y)],$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos (x + y) - \cos (x - y)].$$

i) Szögfüggvényeknek egymással való kifejezése:

α) Adott $\sin x$, akkor

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}.$$

β) Adott $\cos x$, akkor

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}.$$

γ) Adott $\operatorname{tg} x$, akkor

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

δ) Adott $\operatorname{ctg} x$, akkor

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

4. Néhány fontos határérték

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

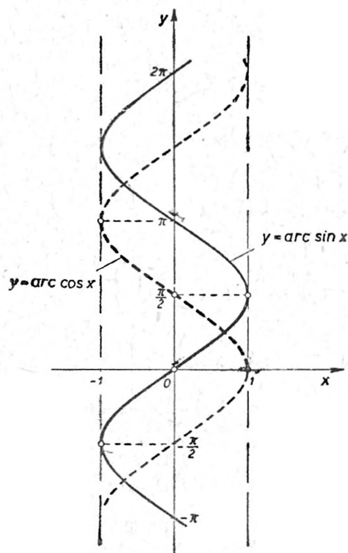
Így, ha x elegendő kicsiny, akkor jó közelítéssel:

$$\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x,$$

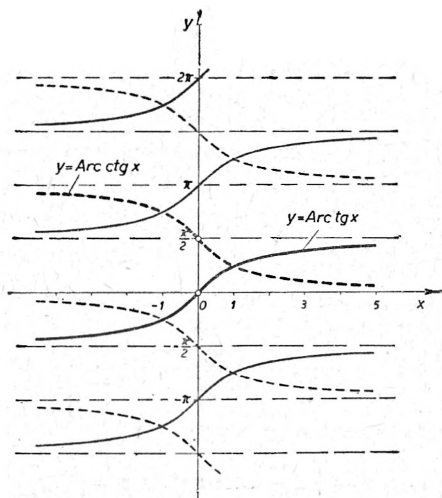
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

6. §. Az arkuszfüggvények

1. Definíció A trigonometrikus függvények inverzei az ún. *arkuszfüggvények* (9. és 10. ábra).



9. ábra



10. ábra

$y = \text{arc}\sin x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \sin y$, $-1 \leqq x \leqq 1$;
$y = \text{arc}\cos x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \cos y$, $-1 \leqq x \leqq 1$;
$y = \text{arc}\,\text{tg}\, x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \text{tg}\, y$, $-\infty < x < \infty$;
$y = \text{arc}\,\text{ctg}\, x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \text{ctg}\, y$, $-\infty < x < \infty$.

Ezek a függvények *végtelen sok értékűek*. Ennek elkerülése céljából bevezetjük az arkuszfüggvények *főértékét*:

$$y = \text{Arc}\sin x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2};$$

$$y = \text{Arc}\cos x, \qquad 0 \leqq y \leqq \pi;$$

$$y = \text{Arc}\,\text{tg}\, x, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \text{Arc}\,\text{ctg}\, x, \qquad 0 < y < \pi.$$

2. Fontosabb összefüggések

$$\text{Arc}\,\text{tg}\,\frac{1}{x} = \text{Arc}\,\text{ctg}\, x, \text{ ha } x > 0.$$

$$\text{Arc}\sin x + \text{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Arc}\,\text{tg}\, x + \text{Arc}\,\text{ctg}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Arc}\sin x \pm \text{Arc}\sin y = \text{Arc}\sin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right);$$

$$\text{Arc}\cos x \pm \text{Arc}\cos y = \text{Arc}\cos\left(xy \mp \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right);$$

$$\text{Arc}\,\text{tg}\, x \pm \text{Arc}\,\text{tg}\, y = \text{Arc}\,\text{tg}\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy};$$

$$\text{Arc}\,\text{ctg}\, x \pm \text{Arc}\,\text{ctg}\, y = \text{Arc}\,\text{ctg}\,\frac{xy \mp 1}{y \pm x}.$$

7. § Hiperbolikus függvények

1. Definíció

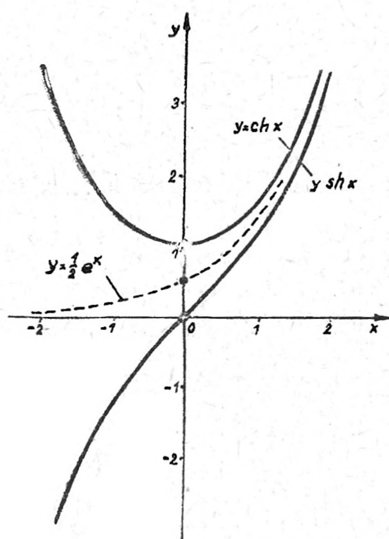
$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad -\infty < x < \infty;$$

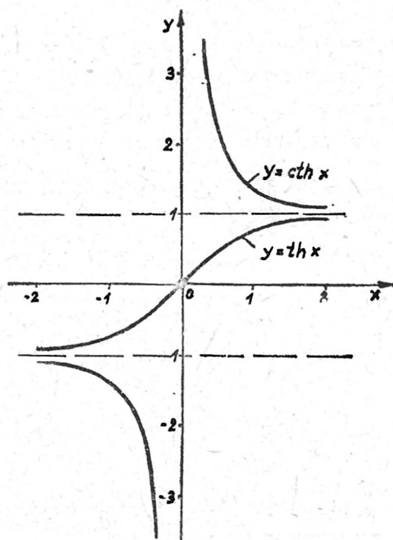
$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\text{cth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \; x \neq 0, \text{ egyébként } -\infty < x < \infty \text{ (11. és 12. ábra).}$$

$\text{sh}(-x) = -\text{sh}\, x$; $\text{ch}(-x) = \text{ch}\, x$; $\text{th}(-x) = -\text{th}\, x$; $\text{cth}(-x) = -\text{cth}\, x$.



11. ábra



12. ábra

2. Fontosabb összefüggések

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$\operatorname{sh}(u \pm v) = \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{ch} v \pm \operatorname{ch} u \cdot \operatorname{sh} v,$$

$$\operatorname{ch}(u \pm v) = \operatorname{ch} u \cdot \operatorname{ch} v \pm \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{sh} v,$$

$$\operatorname{th}(u \pm v) = \frac{\operatorname{th} u \pm \operatorname{th} v}{1 \pm \operatorname{th} u \cdot \operatorname{th} v}, \quad \operatorname{cth}(u \pm v) = \frac{\operatorname{cth} u \cdot \operatorname{cth} v \pm 1}{\operatorname{cth} v \pm \operatorname{cth} u}.$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx.$$

3. Fontosabb határértékek

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\operatorname{ch} x - \frac{1}{2} e^x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} e^x - \operatorname{sh} x\right) = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{cth} x = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x = -1.$$

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{cth} x = +\infty, \quad \lim_{x \to -0} \operatorname{cth} x = -\infty.$$

8. §. Areafüggvények

Definíció

A hiperbolikus függvények inverzei az ún. *areafüggvények* (13. és 14. ábra).

$y = \operatorname{arsh} x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \operatorname{sh} y$,

$y = \operatorname{arch} x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \operatorname{ch} y$,

$y = \operatorname{arth} x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \operatorname{th} y$,

$y = \operatorname{arcth} x$ ugyanazt jelenti, mint $x = \operatorname{cth} y$.

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right);$$

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

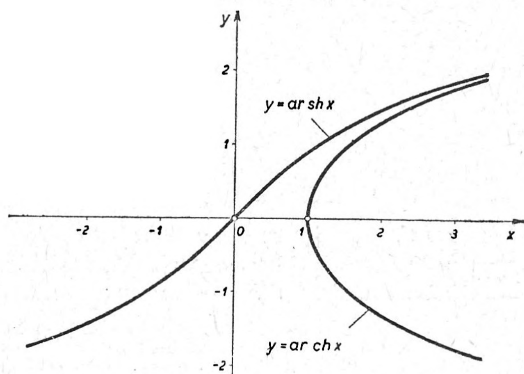
ahol $x \geqq 1$;

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x},$$

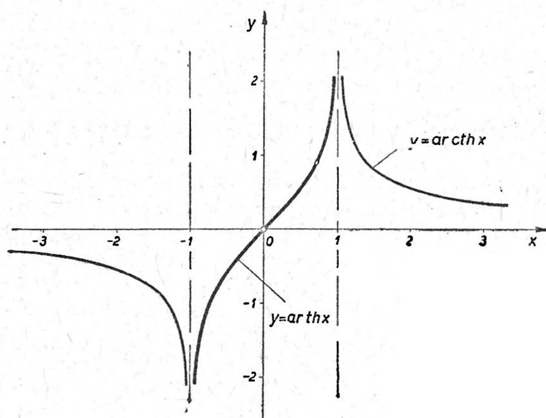
ahol $|x| < 1$;

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1},$$

ahol $|x| > 1$.



13. ábra



14. ábra

V. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

1. §. A derivált fogalma

1. Differencia-hányados és derivált

a) Az $y = f(x)$ függvény Δx független változó értékváltozás-hoz tartozó relatív értékváltozásának a mértéke a *függvény differenciahányadosa:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

b) Az $y = f(x)$ függvény lokális relatív függvény-értékváltozásának a mértéke a *függvény deriváltja:*

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

c) Egy függvényt *deriválni (differenciálni)* annyit jelent, mint meghatározni a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differenciahányados határértékét a $\Delta x \to 0$ határátmenet esetén.

d) Az $y = f(x)$ függvény az x helyen *differenciálható,* ha

α) minden előre megadott tetszés szerinti kicsiny $\varepsilon > 0$ számhoz található egy olyan elegendő kicsiny $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

legyen, hacsak

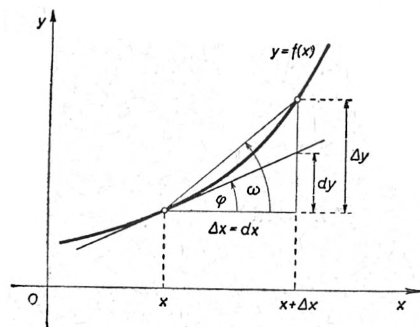
$$0 < |\Delta x| < \delta(\varepsilon);$$

β) ha megadható egy Δx-től független és csak x-től függő $f'(x)$ függvény úgy, hogy

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(x; \Delta x) \cdot \Delta x$$

legyen, ahol

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x; \Delta x) = 0.$$



15. ábra

e) Az $y = f(x)$ függvény az $a < x < b$ intervallumban differenciálható, ha az intervallumhoz tartozó minden x helyen differenciálható.

2. Geometriai jelentés

a) A *differenciahányados* geometriailag az $y = f(x)$ függvény görbéje azon szelőjének az iránytangensét jelenti, mely az x és $x + \Delta x$ abszcisszájú pontokon megy keresztül (15. ábra).

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

b) A *derivált* geometriailag az $y = f(x)$ függvény görbéje azon *érintőjének az iránytangensét* jelenti, amely a görbe x abszcisszájú pontjához tartozik (15. ábra).

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

3. Differenciálhatóság és folytonosság

a) Ha az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ helyen differenciálható, akkor ott folytonos. E tétel megfordítása azonban nem áll fenn, azaz nem minden $x = x_0$ helyen folytonos függvénynek van e helyen deriváltja.

b) Ha az $f(x)$ függvény deriváltja az $a < x < b$ intervallumban folytonos, akkor azt mondjuk, hogy ott a függvény *folytonosan differenciálható.*

4. Jobb- és baloldali derivált

a) Az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ helyen jobbról differenciálható, ha a differenciahányadosnak van jobboldali határértéke. Ezt a határértéket nevezzük a függvény *jobboldali deriváltjának:*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_+(x).$$

b) Az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ helyen balról differenciálható, ha a differenciahányadosnak van baloldali határértéke. Ezt a határértéket nevezzük a függvény *baloldali deriváltjának:*

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_-(x).$$

c) Az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ helyen csak akkor differenciálható a szó szoros értelmében, ha e helyen a jobb- és baloldali derivált egyenlő (vagyis ha a differenciahányados határértéke független a határátmenet módjától).

d) Ha az x_0 helyen a jobb- és baloldali derivált egyenlő és $f'(x)$ folytonos, akkor x_0 környezetében az $f(x)$ függvény *görbéjének íve sima.*

5. Differenciál

a) Az *x független változó dx differenciálja* e változónak tetszőleges megváltozása:

$$dx = \Delta x = h.$$

b) Az $y = f(x)$ *függvény dy differenciálja* az $f'(x)$ deriváltnak és a független változó differenciáljának a szorzata:

$$dy = f'(x)\, dx = f'(x)\, \Delta x.$$

c) A függvény differenciáljának az értelmezése alapján a derivált egyenlő a differenciálok hányadosával *(differenciálhányados):*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

d) Az $f(x)$ függvény differenciálja geometriailag azt fejezi ki, hogy mekkora az $f(x)$ görbe érintőjének az az ordinátaváltozása, mely a dx abszcisszaváltozáshoz tartozik (15. ábra).

e) Az $f(x)$ függvény dy differenciálja a Δy függvényértékváltozás fő része:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(x;\ \Delta x) \cdot \Delta x = dy + \varepsilon(x;\ \Delta x)\ \Delta x.$$

Ha tehát $\Delta x = dx$ elég kicsiny, akkor jó közelítéssel:

$$\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot dx,$$

azaz a függvényérték változása „kicsiny"-ben jó közelítéssel homogén lineáris függvénye a független változó értékváltozásának. Ennek alapján számíthatjuk véges, kicsiny $dx = \Delta x$-ekhez tartozó Δy-ok értékét. A fenti közelítő egyenlőség az ún. *„véges növekmények" tételét* fejezi ki. (Véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség.)

2. §. Differenciálási szabályok

1. Általános szabályok

a) Ha $y = c =$ állandó, akkor $y' = 0$.

Ha $y = c \cdot f(x)$, ahol $c =$ állandó, akkor $y' = c \cdot f'(x)$.

Ha $y = u(x) \pm v(x)$, akkor $y' = u'(x) \pm v'(x)$.

Ha $y = u \cdot v$, akkor $y' = u'v + uv'$.

Ha $y = \dfrac{u}{v}$, és $v \neq 0$, akkor $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

b) Legyen az $y = y(x)$ függvény *inverze* az $x = x(y)$ függvény és mindkettő differenciálható, továbbá $x'(y) = \dfrac{dx}{dy} \neq 0$, akkor

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'(y)}.$$

c) Legyen

$$y = y\,[u(x)]$$

egy ún. *összetett függvény*, ahol

$$u = u(x)$$
$$y = y(u)$$

differenciálható függvények. Akkor

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

d) Ha az $y = f(x)$ függvény $[a(x)]^{b(x)}$ alakú (exponenciális hatványfüggvény), vagy valamilyen összetett szorzat-, illetve tört függvény, akkor a derivált kiszámítására alkalmazzuk a *logaritmikus differenciálás* módszerét. Vesszük mindkét oldal e alapú logaritmusát, és az így nyert kifejezés mindkét oldalát x szerint differenciáljuk, majd a nyert egyenlőségből y'-t kifejezzük.

Pl. ha $y = [a(x)]^{b(x)}$, akkor $\ln y = b(x) \cdot \ln\,[a(x)]$ és így

$$\frac{y'}{y} = b'(x) \cdot \ln\,[a(x)] + b(x)\,\frac{a'(x)}{a(x)},$$

ahonnan y' kifejezhető.

2. Az alapfüggvények deriváltjai

Az alábbiakban táblázatosan összefoglaljuk az alapfüggvények deriváltjait:

A függvény	Deriváltja
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k egész)	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y = \operatorname{ctg} x,\ x \neq k\pi$ (k egész)	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$, ahol $1 \neq a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$
$y = \operatorname{th} x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$
$y = \operatorname{cth} x,\ x \neq 0$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{cth}^2 x$
$y = \ln x,\ x > 0$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \operatorname{Arc\,sin} x,\ \lvert x \rvert < 1$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{Arc\,cos} x,\ \lvert x \rvert < 1$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{Arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{Arc\,ctg} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$y = \operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x > 1$	$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x},\ \lvert x \rvert < 1$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$
$y = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1},\ \lvert x \rvert > 1$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$

3. §. Magasabbrendű deriváltak

1. n-edik derivált

a) Ha $y = f(x)$, akkor

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

b) $(x^n)^{(n)} = n\,!$; $(e^x)^{(n)} = e^x$; $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$;

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

2. n-edik differenciál

Ha $y = f(x)$, akkor

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n = f^{(n)}(x)\cdot dx^n.$$

3. Leibniz-szabály

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v + \ldots + \binom{n}{n-1} u'\,v^{(n-1)} +$$

$$+ u\,v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}\,v^{(k)}.$$

4. Új független változó bevezetése

Legyen $y = f(x)$ és $x = x(t)$, azaz $y = f\,[x(t)] = y(t)$, akkor mivel

$$dy = f'(x)\,dx,$$

$$d^2y = f'(x)\,d^2x + f''(x)\,dx^2,$$

$$d^3y = f'(x)\,d^3x + 3\,f''(x)\,d^2x\,dx + f'''(x)\,dx^3,$$

. . . .

azért (a t szerinti deriváltakat felül ponttal jelölve):

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3},$$

$$f'''(x) = \frac{dx^2\,d^3y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy(d^2x)^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5} =$$

$$= \frac{\dot{x}^2\,\dddot{y} - 3\dot{x}\,\ddot{x}\,\ddot{y} + 3\dot{y}\,\ddot{x}^2 - \dot{x}\,\dot{y}\,\dddot{x}}{\dot{x}^5},$$

. . . .

4. §. Középértéktétel

1. Rolle tétele

Legyen az $y = f(x)$ függvény az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos, és az $a < x < b$ nyitott intervallumban differenciálható; legyen továbbá $f(a) = f(b) = 0$. Ekkor található az (a, b) intervallumban legalább egy olyan ξ hely, ahol $f'(\xi) = 0$.

2. Lagrange-féle középértéktétel

a) Ha $y = f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos, és az $a < x < b$ nyitott intervallumban differenciálható, akkor található legalább egy ezen intervallum belsejébe eső ξ hely úgy, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{ahol} \quad a < \xi < b.$$

b) Az előző tétel következménye:

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x + \vartheta h), \quad \text{ahol} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

3. Cauchy-féle középértéktétel

Ha $f(x)$ és $g(x)$ két — az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban — folytonos és ezen intervallum minden belső pontjában differenciálható függvény, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $a < x < b$, akkor

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad \text{ahol } a < \xi < b.$$

5. §. Határozatlan alakokra vezető határértékek meghatározása

Bernoulli—l'Hospital szabálya

a) Ha az $x = a$ helyen az $\frac{f(x)}{g(x)}$ függvény a $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra vezet, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy ez az utóbbi határérték létezik.

b) Ha az $x = a$ helyen az $f(x) \cdot g(x)$ függvény a $0 \cdot \infty$ alakra vezet, akkor

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'},$$

feltéve, hogy ez az utóbbi határérték létezik.

c) Ha az $x = a$ helyen az $f(x) - g(x)$ függvény a $\infty - \infty$ alakra vezet, akkor

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'},$$

feltéve, hogy ez az utóbbi határérték létezik.

d) Ha az $x = a$ helyen az $[f(x)]^{g(x)}$ függvény a 0^0, ∞^0, 1^∞ alakokra vezet, akkor először meghatározzuk a

$$\lim_{x\to a} \ln\left([f(x)]^{g(x)}\right) = b$$

határértéket, ahonnan következik, hogy

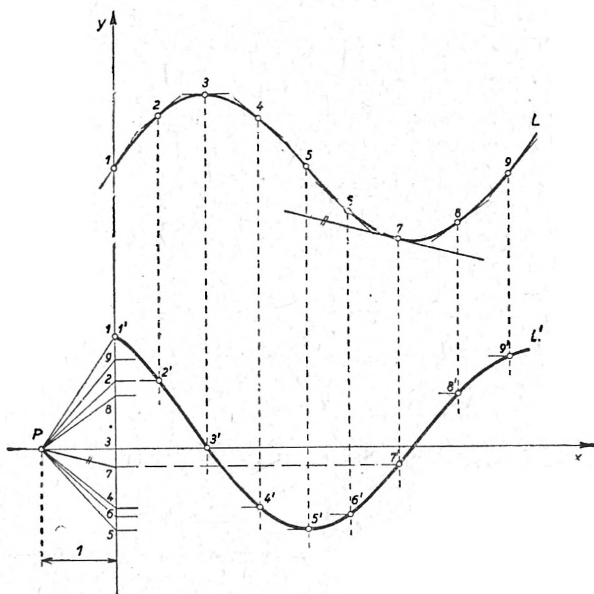
$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = e^b.$$

6. §. Grafikus és numerikus differenciálás

1. Grafikus differenciálás

Az adott L görbe (16. ábra) L' deriváltgörbéjének tetszőleges pontjaihoz a következőképpen jutunk:

Az L görbén választott 1, 2, ... osztópontokban meghúzzuk a görbe érintőit. Ezekkel az érintőkkel párhuzamosakat rajzolunk a $P(-1, 0)$ póluson keresztül. Ezek a párhuzamosak kimetszik az y tengelyen az L' görbe megfelelő ordinátáit.



16. ábra

2. Numerikus differenciálás

Legyen az $y = f(x)$ függvény táblázattal megadva:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_i	...
y	y_0	y_1	y_2	...	y_i	...

Keressük ennek a függvénynek $f'(x)$ deriváltját.

Az adott függvényt az (x_{i-1}, y_{i-1}) és (x_i, y_i) értékpárok által meghatározott szakaszon egy másodfokú polinommal helyettesítjük, és felhasználjuk azt a tételt,

hogy a $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú parabola tetszőleges $x = \xi$ és $x = \xi + h$ abszcisszájú pontjaira illeszkedő húrja párhuzamos a parabola $x = \xi + \frac{h}{2}$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőjével. Így az adott függvény deriváltjának közelítő értéke az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum felezőpontjában közelítőleg:

$$f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}.$$

A számítás menetét az alábbi táblázat szemlélteti:

x_i	y_i	Δy_i	$f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$
x_0	y_0		
		$y_1 - y_0$	$f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
x_1	y_1		
		$y_2 - y_1$	$f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
x_2	y_2		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_{i-1}	y_{i-1}		
		$y_i - y_{i-1}$	$f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$
x_i	y_i		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

A számítás egyszerűsödik, ha a táblázat aequidistans argumentumértékekre van megadva, azaz ha

$$x_i - x_{i-1} = h = \text{állandó}.$$

7. §. Függvényvizsgálat, görbediszkusszió

A függvény	ha
az a helyen folytonos	bármilyen kicsiny $0 < \varepsilon$-hoz található olyan $0 < \delta$, hogy $\lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$, hacsak $\lvert x - a \rvert < \delta$.
monoton növekszik	$x_2 > x_1$ esetén $f(x_2) > f(x_1)$
monoton csökken	$x_2 > x_1$ esetén $f(x_2) < f(x_1)$
görbéje $[a, b]$-ben alulról konvex	$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $a \leqq x_1, x_2 \leqq b$
görbéje $[a, b]$-ben felülről konvex	$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $a \leqq x_1, x_2 \leqq b$.

$y = f(x)$ görbéje (görbéjének) az $x = x_0$ helyen		ha $f'(x_0)$, illetve $f'(x)$ az $x = x_0$ hely környezetében	és $f''(x_0)$
emelkedik		> 0	
süllyed		< 0	
alulról konvex		növekszik	> 0
felülről konvex		csökken	< 0
vízszintes érintőjű		0	
helyi szélső értéke, azaz	maximuma van, azaz vízszintes érintőjű és felülről konvex	0, előjelet vált és csökken	< 0
	minimuma van, azaz vízszintes érintőjű és alulról konvex	0, előjelet vált és növekszik	> 0
inflexiós pontja van: sem alulról, sem felülről nem konvex, hanem épp „áthajlik"		sem nem növekszik, sem nem csökken, azaz helyi szélső értéke van	sem nem > 0, sem nem < 0, hanem 0, előtte és utána különböző előjelű.

Vannak függvények, melyeknél egy adott $x = a$ helyen az első, második stb. deriváltak mind eltűnnek. Ha az első el nem tűnő, 0-tól különböző derivált páros rendű, akkor a függvénynek az $x = a$ helyen helyi szélső értéke van, éspedig ha ez a derivált negatív, akkor helyi maximuma, ha pedig pozitív, akkor helyi minimuma van. Ha az első el nem tűnő, 0-tól különböző derivált páratlan rendű, akkor a függvénynek az $x = a$ helyen inflexiós pontja van.

8. §. Taylor-formula

1. Általános alak

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

ahol R_n az n-ed fokú *Taylor-polinom* ún. *maradéktagja:*

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(z)\,(x-z)^n\,dz,$$

ahol

$$\xi = a + \vartheta(x-a), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

2. Más írásmódok

a) $$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

b) *Mac Laurin*-féle alak:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

VI. EGYENLETEK MEGOLDÁSA

1. §. Algebrai egyenletek gyökeinek szétválasztása

1. Gyökök abszolút értékének felső korlátja

Ha az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

algebrai egyenletben M az

$$|a_{n-1}|, \ |a_{n-2}|, \dots, \ |a_0|$$

számok legnagyobbikát jelenti, akkor az egyenlet valamennyi x gyökének abszolút értékére nézve

$$|x| < K = 1 + \frac{M}{|a_n|}.$$

2. Rolle tétele

A zérustól különböző állandójú, racionális együtthatójú algebrai egyenletnek bármely racionális gyöke csak olyan tört lehet, amelynek számlálója a legalacsonyabb, nevezője pedig a legmagasabb fokú tag együtthatójának osztója.

3. A többszörös gyökök eltávolítása

Az $f(x)$ polinom többszörös zérushelyeit úgy távolítjuk el, hogy $f(x)$-et önmagának és $f'(x)$ deriváltjának legnagyobb közös osztójával osztjuk.

4. Descartes jelszabálya

a) A valós együtthatójú

$$f(x) \equiv a_n x^n + \dots + a_0 = 0$$

egyenlet ténylegesen fellépő, a zérustól különböző együtthatóinak sorozatában két egymás mellett álló együttható jelkövetkezést, illetve jelváltást mutat aszerint, amint előjelük megegyező, illetve ellenkező.

b) Valós együtthatójú algebrai egyenlet pozitív gyökeinek száma az egyenlet többtagújában fellépő jelváltások számával vagy megegyezik, vagy ennél egy páros számmal kisebb.

c) Az $f(x) = 0$ egyenlet negatív gyökeinek a száma az $f(-x) = 0$ egyenlet jelváltásainak számával vagy megegyezik, vagy ennél egy páros számmal kisebb.

5. Sturm tétele

a) Az $f(x) = 0$ egyenlet $f(x)$ többtagújából és ennek $f'(x)$ deriváltjából a következő sorozatot képezzük:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f'(x) \cdot Q_1(x) - R_1(x) \\
f'(x) &= R_1(x) \cdot Q_2(x) - R_2(x) \\
R_1(x) &= R_2(x) \cdot Q_3(x) - R_3(x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
R_{m-2}(x) &= R_{m-1}(x) \cdot Q_m(x) - R_m(x),
\end{aligned}$$

ahol $-R_1(x)$ az $f(x)$-nek $f'(x)$-szel való osztása útján adódó osztási maradék, $-R_2(x)$ az $f'(x)$-nek $R_1(x)$-szel való osztása útján adódó osztási maradék, ..., $-R_i(x)$ az $R_{i-2}(x)$-nek $R_{i-1}(x)$-szel való osztása útján adódó osztási maradék, ..., végül $-R_m(x)$ a legutolsó, zérustól különböző osztási maradék.

b) Az így nyert

$$f(x),\ f'(x),\ R_1(x), \ldots, R_m(x)$$

ún. *Sturm-féle lánc* helyettesítési értékeinek a sorozatát a vizsgált $a \leqq x \leqq b$ intervallum végpontjaiban meghatározzuk, s az így nyert két

$$f(a),\ f'(a),\ R_1(a),\ \ldots,\ R_m(a)$$
$$f(b),\ f'(b),\ R_1(b),\ \ldots,\ R_m(b)$$

sorozat $V(a)$, illetve $V(b)$ jelváltásainak számát megállapítjuk.

c) Ha $a < b$ és $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek a és b között pontosan $V(a) - V(b)$ gyöke van, tekintet nélkül ezeknek esetleges többszörösségére.

2. §. Közelítő módszerek

1. Húr-módszer (regula falsi)

Legyen a megoldandó egyenlet

$$f(x) = 0,$$

és $f(x)$ folytonos az $\alpha_1 \leqq x \leqq \beta_1$ intervallumban. Legyen továbbá

$$f(\alpha_1) \cdot f(\beta_1) < 0,$$

azaz $f(\alpha_1)$ és $f(\alpha_2)$ ellenkező előjelű. Ekkor

$$\gamma_1 = \alpha_1 - \frac{\beta_1 - \alpha_1}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)} f(\alpha_1),$$

azaz az $f(x)$ függvény görbéje $[\alpha_1, f(\alpha_1)]$ és $[\beta_1, f(\beta_1)]$ pontjain áthaladó húrjának a zérushelye, az egyenlet gyökének α_1-nél és β_1-nél is jobb közelítése. A görbe húrjának az x tengellyel való metszéspontját és az α_1, β_1 abszcisszájú pontok közül azt, amelyben $f(x)$ értéke ellenkező előjelű, mint a húr x tengellyel való metszéspontjában, α_2- és β_2-vel jelölve, az eljárást megismételhetjük. Ismételten alkalmazva az eljárást, a gyök pontos értékét tetszőleges pontossággal megközelíthetjük.

2. Érintő-módszer (Newton módszere)

Kiindulunk az $f(x) = 0$ egyenlet gyökének egy közelítő x_1 értékéből és egy további közelítő értéket az $y = f(x)$ függvény görbéje x_1 abszcisszájú pontjában húzott érintőjének az x tengellyel való metszéspontjában kapunk. Erre az x_2 értékre adódik:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Az x_2 érték segítségével azután hasonló módon meghatározhatjuk az x_3 értéket stb.

Ha ξ gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek és a $\xi \leqq x \leqq x_1$* intervallumban $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, továbbá $f(x_1)$ előjele megegyezik $f''(x)$-nek ezen intervallumhoz tartozó előjelével, akkor az érintő-módszerrel kapott $x_1, x_2, x_3, \ldots$ értékek sorozata ξ-hez konvergál.

---

* vagy $x_1 \leq x \leq \xi$.

3. Iteráció Ha x_1 az $x = \varphi(x)$ egyenlet gyökének egy közelítő értéke, akkor egy következő közelítő értéknek az $x_2 = \varphi(x_1)$ értéket választjuk, továbbá $x_3 = \varphi(x_2)$ és így tovább.

Ha ξ az $x = \varphi(x)$ egyenletnek gyöke, $\xi - \delta < x_1 < \xi + \delta$ (ahol $\delta > 0$), továbbá $|\varphi'(x)| \leqq q < 1$, hacsak $\xi - \delta \leqq x \leqq \xi + \delta$, akkor az iterációval nyert $x_1, x_2, x_3, \ldots$ értékek sorozata ξ-hez konvergál.

Ha a mondott feltétel $\varphi'(x)$-re nem teljesül, akkor áttérhetünk az inverz függvényre.

4. A Ruffini—Horner-féle módszer *a)* Az $f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ algebrai egyenlet $f(x)$ többtagúját az x_1 közelítés helyén az $u = x - x_1$ pontos hiba hatványai szerint átrendezzük, azaz x_1 körül Taylor szerint

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n + \ldots + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + f(x_1) =$$

$$= a_n u^n + a_{n-1}^{(n)} u^{n-1} + \ldots + a_2'' u^2 + a_1' u + a_0' = 0$$

alakban előállítjuk. Ha u abszolút értéke kicsiny, azaz x_1 a gyök pontos értékének jó közelítése, akkor az u-ra vonatkozó egyenlet gyökének értéke jó közelítéssel az

$$a_1'' u + a_0' = 0$$

egyenletből számítható. Legyen ennek az első fokú egyenletnek a gyöke u_2, akkor az eredeti egyenlet gyökének x_1-nél jobb közelítése:

$$x_2 = x_1 + u_2.$$

A további közelítésnél teljesen hasonlóan járunk el. Az u-ra vonatkozó egyenletes $v = u - u_2$ hatványai szerint átrendezzük. Ha az így nyert egyenlet közelítő megoldása v_3, akkor a legelső egyenlet gyökének újabb közelítése

$$x_3 = x_1 + u_2 + v_3$$

és így tovább.

b) Az $f(x)$ polinomnak az $(x - a)$ hatványai szerinti átrendezése az ún. *Horner-féle elrendezésben* egyszerűen végezhető:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
0	$a_n a$	$a_{n-1}' a$	$\ldots$	$a_3' a$	$a_2' a$	$a_1' a$
a_n	a_{n-1}'	a_{n-2}'	$\ldots$	a_2'	a_1'	$a_0' = f(a)$
0	$a_n a$	$a_{n-1}'' a$	$\ldots$	$a_3'' a$	$a_2'' a$	
a_n	a_{n-1}''	a_{n-2}''	$\ldots$	a_2''	$a_1'' = \frac{f'(a)}{1!}$	
0	$a_n a$	$a_{n-1}''' a$	$\ldots$	$a_3''' a$		
a_n	a_{n-1}'''	a_{n-2}'''	$\ldots$	$a_2''' = \frac{f''(a)}{2!}$		
$\ldots$						

Itt az első sorban az x csökkenő hatványai szerint rendezett $f(x)$ polinomnak az együtthatói állanak; az esetleg hiányzók zérus értéküknél. A harmadik sor minden egyes eleme a felette álló két elem összege. A második sor első eleme zérus, minden következő eleme pedig az előző oszlop harmadik elemének a-val való szorzata. A negyedik és ötödik sor elemei hasonlóan adódnak a harmadik sor elemeiből, ahogyan adódtak a második és harmadik sor elemei az elsőből és így tovább.

Még megjegyezzük azt, hogy

$$\frac{f(x)}{x-a} = a_n x^{n-1} + a'_{n-1} x^{n-2} + a'_{n-2} x^{n-3} + \dots + a'_2 x + a'_1 + \frac{a'_0}{x-a}.$$

VII. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

1. §. Határozatlan és határozott integrál

1. Határozatlan integrál

Azt az $F(x)$ függvényt, mely egy adott $f(x)$ függvény deriváltja, az $f(x)$ függvény *primitív függvényének* nevezzük:

$$F'(x) = f(x).$$

Az $F(x)$ primitív függvények összességét az $f(x)$ függvény *határozatlan integráljának* nevezzük.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{és} \quad f(x) = F'(x)$$

ugyanazt jelenti.

2. Határozott integrál

a) Ha $F'(x) = f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0;\quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$

2. §. Integrálási szabályok

1. Alapintegrálok

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq -1;\quad \text{ha } n < -1,$$

akkor $x \neq 0$.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\quad x \neq 0.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = \operatorname{tg} x + C,\ \text{hacsak}\ (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

ahol k egész szám.

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (\operatorname{ctg}^2 x + 1)\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$, hacsak $k\pi < x < (k+1)\pi$, ahol k egész szám.

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1.$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int (1 - \operatorname{th}^2 x)\, dx = \operatorname{th} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \int (\operatorname{cth}^2 x - 1)\, dx = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x + C = -\operatorname{Arc} \cos x + D, \quad |x| < 1.$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x + D.$$

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arch} |x| + C = \ln (|x| \pm \sqrt{x^2 - 1}) + C, \quad |x| > 1.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arsh} x + C = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, & \text{ha } |x| < 1, \\ \operatorname{arcth} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

$$\int \ln x\, dx = x (\ln x - 1) + C, \quad x > 0.$$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$, hacsak $k\pi < x < (k+1)\pi$, ahol k egész szám.

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| + C$, hacsak $(2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ahol k egész szám.

2. Általános szabályok

a) $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$, ha $c =$ állandó.

$$\int [u(x) \pm v(x)]\, dx = \int u(x)\, dx \pm \int v(x)\, dx.$$

$$\int \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)\}\, dx = c_1 \int f_1(x)\, dx +$$
$$+ c_2 \int f_2(x)\, dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\, dx.$$

b) *Új változó bevezetése:*

$$\int f[u(x)]\, u'(x)\, dx = \left[\int f(u)\, du\right]_{u=u(x)}; \qquad \int f(x)\, dx = \left[\int f[x(t)]\, x'(t)\, dt\right]_{t=t(x)}.$$

c) *Parciális integrálás* (szorzatfüggvény integráljának redukciója):

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

c) $\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$, hacsak $F'(x) = f(x)$.

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C, \quad \text{hacsak } n \neq -1.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C, \quad \text{hacsak } f(x) \neq 0.$$

3. Néhány fontosabb integrál

$$\int (a + bx^n)^m\, x^{n-1}\, dx = \frac{(a + bx^n)^{m+1}}{bn(m+1)} + C,$$

hacsak $bn \neq 0$, $m \neq -1$.

$$\int \frac{x^{n-1}}{a + bx^n}\, dx = \frac{1}{bn} \ln|a + bx^n| + C, \quad \text{hacsak } bn \neq 0.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a + bx^2}}\, dx = \frac{1}{b}\sqrt{a + bx^2} + C.$$

$$\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx = \operatorname{Arc\,sin} x - \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{n+1}\right) + C, \quad \text{hacsak } n \neq -1.$$

$$\int x^{-1} \ln x\, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

$\int e^{-x} x^n\, dx = -e^{-x}[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \ldots + n!] + C$, ahol $n > 0$ és egész.

$\int e^{-x} g(x)\,dx = -e^{-x}[g(x) + g'(x) + g''(x) + \ldots + g^{(n)}(x)] + C$, hacsak $g(x)$ egy n-ed fokú racionális egész függvény.

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \text{ ha } n \geqq 2.$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx, \text{ ha } n \geqq 2.$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

4. Néhány fontosabb határozott integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{ha } n \text{ páros szám} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)\ldots 5\cdot 3}, & \text{ha } n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq 0 \text{ és páros szám,} \\ \dfrac{2}{k}, & \text{ha } k \text{ páratlan szám,} \\ 0, & \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos kx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq 0, \\ \pi, & \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos px \cdot \cos qx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq q, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } p = q \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin px \cdot \sin qx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq q, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } p = q \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos px \cdot \sin qx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } p = q, \text{ vagy } p+q \text{ páros szám,} \\ \dfrac{2q}{q^2-p^2}, & \text{ha } p+q \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq 0. \\ 2\pi, & \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\,x\,dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos p\,x \cdot \cos q\,x\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq q, \\ \pi, & \text{ha } p = q \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin p\,x \cdot \sin q\,x\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq q, \\ \pi, & \text{ha } p = q \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos p\,x \cdot \sin q\,x\,dx = 0.$$

5. Határozott integrál kiszámítása helyettesítéssel

$$\int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx = \int_{u=u(a)}^{u(b)} f(u)\,du, \text{ ha } u(x) = u \text{ a helyettesítés.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t=t(a)}^{t(b)} f[x(t)] \cdot x'(t)\,dt, \text{ ha } x = x(t),\ t = t(x) \text{ a helyettesítés.}$$

6. Másodfokú polinom néhány függvényének az integrálása

Az

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$$

$(a \neq 0)$ alakú integrálok kiszámításánál úgy járunk el, hogy először az

$$ax^2 + bx + c$$

másodfokú polinomot kiegészítjük teljes négyzetté:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Ekkor az

$$\alpha = c - \frac{b^2}{4a}, \quad \xi = x + \frac{b}{2a}, \quad d\xi = dx$$

jelölésekkel, illetve helyettesítéssel az adott integrálok a következő ún. normálalakot öltik:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{a\,\xi^2 + \alpha}}, \quad \int \frac{d\xi}{a\,\xi^2 + \alpha}, \quad \int \sqrt{a\,\xi^2 + \alpha}\,d\xi.$$

A fontosabb alesetek a következők:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arth} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} + C; \quad x^2 < a^2.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcth} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{2a} \ln \frac{x + a}{x - a} + C; \quad x^2 > a^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{Arccos} \frac{x}{a} + c; \quad x^2 < a^2.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arch} \left| \frac{x}{a} \right| + C = \ln (|x| \pm \sqrt{x^2 - a^2}) + c; \quad x^2 > a^2.$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + C; \quad x^2 < a^2.$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Arch} \left| \frac{x}{a} \right| + C; \quad x^2 > a^2.$$

7. Racionális függvények integrálása

Miután egy racionális függvény részlettörtes alakját előállítottuk, integrálását

a) polinom,

b) $\frac{1}{(x - a)^k}$ alakú hatványok, és *c*) $\frac{Ax + B}{(x^2 + 2b\,x + c)^n}$ alakú törtfüggvények

integrálására vezetjük vissza. Az *a*) és *b*) alatti tagok nyomban integrálhatók, és hatványokra, illetve logaritmusokra vezetnek. A *c*) alatti tagok az

$$x = u\sqrt{c - b^2} - b, \quad dx = du\sqrt{c - b^2}$$

helyettesítéssel

$$\int \frac{C\,u + D}{(1 + u^2)^n}\, du$$

alakra hozhatók. Ebből viszont adódik:

$$\int \frac{Cu + D}{(1 + u^2)^n} = \frac{C}{2} \int \frac{2u\, du}{(1 + u^2)^n} + D \int \frac{du}{(1 + u^2)^n}.$$

Itt a jobb oldal első integrálja rögtön meghatározható. A második $n = 1$ esetén Arctg u, $n > 1$ esetén pedig az

$$\int \frac{du}{(1 + u^2)^n} = \frac{u}{(2n - 2)(1 + u^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \int \frac{du}{(1 + u^2)^{n-1}}$$

rekurziós képlet alapján $n - 1$ lépés után ugyanerre visszavezethető.

8. Racionális függvények integrálására visszavezethető integrálok

a) Ha az integrálandó függvény $\sin x$- és $\cos x$-ből pusztán a négy alapművelet segítségével felépített kifejezés, más szóval e két függvénynek

$$R(\sin x, \cos x)$$

racionális függvénye, akkor integrálása a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel mindig a t változó racionális függvényének integrálására vezethető vissza.

Ha ui. $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, akkor

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{és} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

b) Ha az integrálandó függvény e^x racionális függvénye, akkor az $u = e^x$ helyettesítéssel az integrál az u változó racionális függvényének az integrálására vezethető vissza.

Ha ui. $u = e^x$, akkor

$$dx = \frac{du}{u}.$$

c) Ha az integrálandó függvény

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

alakú, ahol R az argumentumainak racionális függvénye, akkor először is a változó megfelelő lineáris transzformációjával ez a függvény a következő függvények egyikére vezet:

$$R_1\left(x, \sqrt{x^2}\right), \quad R_2\left(x, \sqrt{1-x^2}\right), \quad R_3\left(x, \sqrt{x^2-1}\right), \quad R_4\left(x, \sqrt{1+x^2}\right),$$

ahol $R_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ismét az argumentumainak racionális függvényét jelenti. Ezeknek a függvényeknek az integrálása — az első kivételével, mely nyomban integrálható — megfelelő helyettesítéssel ismét racionális függvények integrálására vezethető vissza. A megfelelő helyettesítések a következők:

α) $R_2\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ esetén $x = \sin u$;

β) $R_3\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)$ esetén $x = \operatorname{ch} u$;

γ) $R_4\left(x, \sqrt{1+x^2}\right)$ esetén $x = \operatorname{sh} u$.

d) Ha az integrálandó függvény x, $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{cx+d}$ racionális kifejezése:

$$R\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}\right),$$

akkor pl. a $\sqrt{ax+b} = u$ helyettesítéssel u és $\sqrt{Au^2+2Bu+C}$ racionális függvényébe megy át.

e) Ha a $k, l, \ldots$ racionális számok az $\frac{1}{n}$ többszörösei, akkor a

$$R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^k, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^l, \ldots\right]$$

kifejezés voltaképpen x és $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionális kifejezése:

$$R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

ez pedig az $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = u$ helyettesítéssel u racionális függvényébe megy át.

3. §. A határozott integrál mint összeg határértéke (Riemann-féle integrál)

1. Alsó és felső integrálközelítő összeg

Legyen az $y = f(x)$ egyértékű függvény az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban folytonos (vagy legalább szakaszonként folytonos), és legyen m az alsó, M a felső határa. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n részintervallumra, melyeknek Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a szélessége. m_i, illetve M_i az i-edik részintervallumban $f(x)$-nek az alsó, illetve a felső határa. Ekkor $f(x)$-nek az $[a, b]$ intervallumra vonatkozó alsó, illetve felső integrálközelítő összege:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad \text{illetve} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Ha az $[a, b]$ intervallum beosztását minden határon túl finomítjuk, azaz a részintervallumok számát minden határon túl növeljük ($n \to \infty$), és ezzel egyidejűleg még a legnagyobb részintervallum szélességét is minden határon túl csökkentjük ($\max \Delta x_i \to 0$), akkor az integrálközelítő összegek határértékeire fennáll:

$$m(b-a) \leqq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leqq M(b-a).$$

2. Riemann-féle integrál

Ha $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban egyértékű és folytonos (vagy legalább szakaszonként folytonos), akkor az erre az intervallumra vonatkozó alsó és felső integrálközelítő összegek határértéke megegyezik. Ezt a közös határértéket nevezzük $f(x)$-nek az $[a, b]$ intervallumra vonatkozó határozott integráljának. Ha ξ_i jelenti az $[a, b[$ intervallum i-edik részintervallumának egy tetszőleges pontját, akkor

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

3. A Riemann-féle integrál néhány tulajdonsága

a) Az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban értelmezett

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \quad a \leqq x_0 < x \leqq b$$

függvény az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban folytonos, és az $a < x < b$ intervallumban differenciálható, és deriváltja $f(x)$, azaz

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = f(x).$$

b) Ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban folytonos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

4. Görbe alatti terület

Az $y = f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó görbe alatti területének előjeles mérőszámát az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

határozott integrál adja.

4. §. Az integrálszámítás középértéktétele

1. Középérték-tétel

a) Ha $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban folytonos, akkor mindig található az a és b között egy olyan ξ érték, hogy fennálljon:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(\xi), \quad a \leqq \xi \leqq b.$$

b) Ha az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban $f(x)$ és $g(x)$ folytonos, és $g(x)$ végig azonos előjelű, akkor

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx, \quad a < \xi < b.$$

2. Adott függvény adott intervallumra vonatkozó integrál-középértékei

a) *Közönséges (számtani) integrál-középérték:*

$$A\,[f(x)] = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) *Négyzetes (quadratikus) integrál-középérték:*

$$Q\,[f(x)] = +\sqrt{\frac{1}{b - a}\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

3. Integrálbecslések

a) Ha az $a < x < b$ intervallumban $f(x) \geqq 0$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

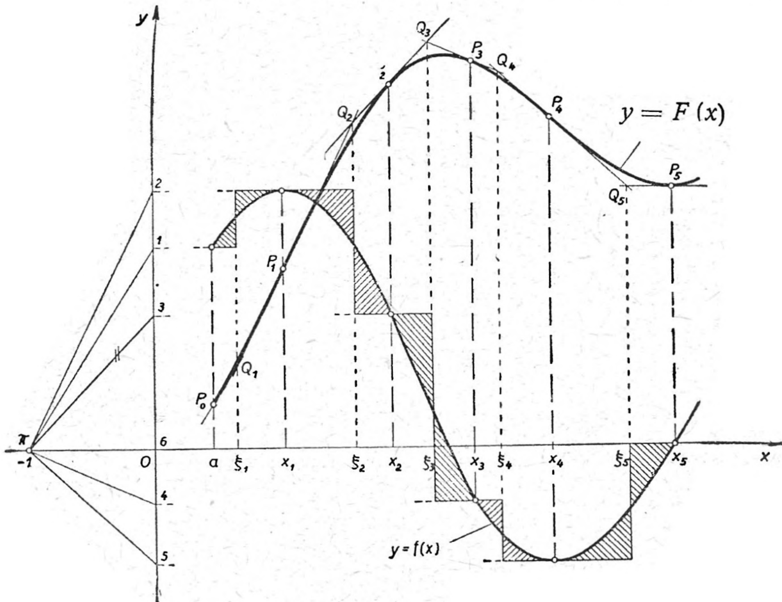
b) Ha az $a < x < b$ intervallumban $f(x) \geqq g(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. §. Grafikus és numerikus integrálás

1. Grafikus integrálás

Az $y = f(x)$ függvénynek az $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó görbe alatti területét mérő $y = F(x)$ függvény görbéjét a következőképpen lehet közelítőleg megszerkeszteni (17. ábra):



17. ábra

Felosztjuk az x tengely $[a, b]$ szakaszát tetszőleges számú és méretű részszakaszokra. Az osztáspontok legyenek:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < b.$$

Minden egyes részszakaszban egy, az ehhez tartozó görbe alatti területtel egyenlő területű, két szakaszból álló lépcsősgörbe alatti területet szerkesztünk. Ezt a szerkesztést úgy végezhetjük el, hogy az $y = f(x)$ görbe $x = x_{i-1}$ és $x = x_i$ helyekhez tartozó pontjaiban x tengellyel párhuzamos egyeneseket húzunk, és kikeressük azt az $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ intervallumban levő $x = \xi_i$ helyet, amelyen y tengellyel párhuzamost

húzva, az így keletkező és az ábrán besraffozott szomszédos területrészek — szemmérték alapján — egyenlők.

A lépcsősgörbe felső, vízszintes határoló vonalait az y tengelyig meghosszabbítjuk, s az ezen keletkezett metszéspontokat összekötjük a szerkesztés $\Pi(-1, 0)$ pólusával. Az ezekkel az egyenesekkel párhuzamosan húzott egyenesdarabokból álló $P_0\,Q_1\,P_1\,Q_2\,P_2\ldots$ törtvonal a keresett területmérő $y = F(x)$ függvény görbéjének érintőtörtvonala.

2. Numerikus integrálás

Az integrálás $a \leqq x \leqq b$ alaptartományát felosztjuk az alábbiakban megadott számú és egyenlő h szélességű részszakaszra, és az x_i osztópontokhoz tartozó y_i ordinátákkal képezett alábbi formulák egyikével így kiadódó közelítő értékkel helyettesítjük az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ pontos értékét.

a) *Trapézszabály* n részszakasszal;

$$T = h\left(\frac{y_a + y_b}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right), \quad h = \frac{1}{n}(b-a).$$

b) *Érintőszabály* $2m$ részszakasszal:

$$U = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2m-1}), \quad h = \frac{1}{2m}(b-a).$$

c) *Kepler-szabály* 2 részszakasszal:

$$K = \frac{h}{3}(y_a + 4y_1 + y_b), \quad h = \frac{1}{2}(b-a).$$

d) *Simpson-szabály* $2m$ részszakasszal:

$$S = \frac{1}{3}(2T + U) = \frac{h}{3}(y_a + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{2m-1} + y_b),$$

$$h = \frac{1}{2m}(b-a).$$

A Simpson-szabály alkalmazásakor a közelítés hibája:

$$|R_m| \leqq \frac{(b-a)^5}{2880\,m^4}M, \quad \text{ahol} \quad M = \max_{[a,\,b]\text{-ben}} |f^{(4)}(x)|.$$

6. §. Az integrálszámítás néhány alkalmazása

1. Szektorterület kiszámítása

Keressük az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe t_1 és t_2 paraméterértékű P_1 és P_2 pontjai közti darabja és e pontokhoz az origóból húzott rádiuszvektorok által határolt szektorszerű síkrész területi mérőszámát.

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}(x\cdot\dot{y} - y\cdot\dot{x})\,dt.$$

Ez a terület pozitív, ha a görbét P_1-től P_2-ig befutva, a rádiuszvektor pozitív értelemben forog.

2. Térfogatszámítás a Cavalieri-féle elv alapján

Legyen ismeretes egy, pl. az x tengely mentén kiterjedő test e tengelyre merőleges síkmetszetének területe mint az x abszcissza $T(x)$ függvénye. A test térfogata az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban:

$$V = \int_a^b T(x)\, dx.$$

3. Forgástest térfogata

Az $y = y(x)$ (egyértékű!) függvény görbéjének az x tengely körüli megforgatásával származó forgástest $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó darabjának a térfogata:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx.$$

4. Görbedarab ívhossza

A folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény görbéjének az $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó ívdarabja

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

hosszúságú.

5. Forgásfelület felszíne

A folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény görbéje $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó ívdarabjának az x tengely körüli megforgatásával származó forgásfelület felszíne:

$$F = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

6. Tömegközéppont (súlypont) koordinátái

a) A folytonos $y = y(x)$ függvényhez tartozó görbe alatti terület tömegközéppontjának (súlypontjának) a koordinátái $[y(x) \geqq 0,\ a \leqq x \leqq b]$:

$$x_s = \frac{\int_a^b x\, y(x)\, dx}{\int_a^b y(x)\, dx}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2(x)\, dx}{\int_a^b y(x)\, dx}.$$

b) A folytonosan deriválható $y = y(x)$ függvény görbéje $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó darabjának a tömegközéppont-koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}; \qquad y_s = \frac{\int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}.$$

c) A folytonos $y = y(x)$ függvény görbéje $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó darabjának az x tengely körüli megforgatásával származó forgástest tömegközéppont-koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_a^b x\, y^2(x)\, dx}{\int_a^b y^2(x)\, dx}; \qquad y_s = 0.$$

d) A folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény görbéje $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó darabjának az x tengely körüli megforgatásával származó forgásfelület tömegközéppont-koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_a^b x y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}{\int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}; \qquad y_s = 0.$$

7. Forgástest másodrendű nyomatéka

A folytonos $y = y(x)$ függvény görbéje $a \leqq x \leqq b$ intervallumhoz tartozó darabjának az x tengely körüli megforgatásával származó forgástest x tengelyre (forgástengelyre) vonatkozó másodrendű nyomatéka:

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_a^b y^4(x)\, dx.$$

8. Pappus—Guldin-féle tételek

a) Homogén forgásfelület felszíne egyenlő a meridián-görbe kerületének (ívhosszának) és a súlypontja által forgatáskor leírt kör kerületének szorzatával. (A meridiángörbe nem metszheti a forgástengelyt!)

b) Homogén forgástest térfogata egyenlő a meridiángörbe alatti területnek és e terület súlypontja által forgatás közben leírt kör kerületének szorzatával. (A meridiángörbe nem metszheti a forgástengelyt!)

7. §. Improprius integrálok

1. Végtelen határú (nem korlátos tartományra kiterjesztett) integrál

a) Legyen $f(x)$ minden $a \leqq x$ esetén integrálható. Akkor

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

hacsak ez a jobboldali határérték létezik.

c) Ha $f(x)$ minden $x \leqq b$ esetén integrálható, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

hacsak ez a határérték létezik.

c) Ha $f(x)$ minden $[a, b]$-ben integrálható, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f(x)\,dx,$$

hacsak ez a jobboldali határérték létezik.

2. Nem korlátos függvény integrálja

a) Ha $f(x)$ a tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén az $a \leqq x \leqq b - \varepsilon$ intervallumban korlátos és integrálható, azonban $\lim\limits_{x \to b-0} |f(x)| = \infty$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

hacsak ez a jobboldali határérték létezik.

b) Ha $f(x)$ a tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén az $a + \varepsilon \leqq x \leqq b$ intervallumban korlátos és integrálható, azonban $\lim\limits_{x \to a+0} |f(x)| = \infty$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

hacsak ez a jobboldali határérték létezik.

c) Ha $f(x)$ a tetszőleges kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén az $a \leqq x \leqq \xi - \varepsilon$ és a $\xi + \varepsilon \leqq x \leqq b$ intervallumokban korlátos és integrálható, azonban $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} |f(\xi \pm \varepsilon)| = \infty$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left\{ \int_a^{\xi - \varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\xi + \varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \right\},$$

hacsak a jobboldali határértékek léteznek.

VIII. FÜGGVÉNYSOROK

1. §. Definíciók és tételek

1. Függvénysor | Az $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ függvényeknek

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

végtelen sora egy *függvénysor*. E sor *konvergens* vagy *divergens* az x helyen, ha

$$s_0(x) = f_0(x), \quad s_1(x) = f_0(x) + f_1(x), \dots, s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x), \dots$$

részletösszegeinek a sorozata, tehát az

$$s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$$

sorozat konvergens vagy divergens az x helyen.

Ha a függvénysor konvergens, akkor *összege* egyenlő a részletösszegek sorozatának határértékével:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = s(x), \quad \text{ha} \quad s_n(x) \to s(x), \quad n \to \infty \text{ esetén.}$$

Azok az x helyek, amelyeken a sor konvergens vagy divergens, a függvénysor konvergencia-, illetve divergenciahelyei. Az előbbiek a függvénysor konvergencia-, az utóbbiak a függvénysor divergenciatartományát alkotják.

2. Egyenletes konvergencia | *a)* A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor valamely tartományban *egyenletesen konvergens*, ha egy tetszés szerint előírt pozitív ε-hoz található egy N küszöbszám úgy, hogy

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N$$

a kérdéses tartomány minden x helyére nézve egyaránt, egyenletesen.

b) A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egy tartományban bizonyára egyenletesen (sőt abszolút) konvergens, ha ott

$$|f_n(x)| \leqq c_n,$$

és a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ numerikus sor konvergens (*Weierstrass tétele*).

c) Folytonos függvények egyenletesen konvergens függvénysoránál az összegfüggvény *folytonos:*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

d) Folytonos függvények egyenletesen konvergens függvénysora *tagonként integrálható:*

$$\int_a^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(x) \right\} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(x)\, dx.$$

e) Folytonos függvények egyenletesen konvergens függvénysoránál ha a tagok differenciálhatók, s deriváltjaik folytonosak, továbbá az utóbbiak sora egyenletesen konvergens, akkor a sor *tagonként differenciálható:*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

2. §. Hatványsorok

1. Definíció A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

alakú függvénysort, melyben az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ együtthatók állandó számok, *hatványsornak* nevezzük.

2. Hatványsor konvergenciája *a*) Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor az x tengely egyik $x_0 \neq 0$ pontjában konvergens, akkor minden az $x = 0$ kezdőponthoz az x_0-nál közelebb eső pontban, tehát az $x = 0$ körül írt $|x_0|$ sugarú $|x| < |x_0|$ köz belsejében abszolút konvergens *(Abel tétele).*

b) Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor a kezdőponton kívül is konvergens, anélkül, hogy mindenütt konvergens volna, akkor pontosan egy a kezdőpont körül R sugárral írt $|x| < R$ köz belsejében (esetleg ennek végpontjaiban) konvergens. R az ún. *konvergenciasugár.*

c) A konvergenciasugarat a hatványsor a_n együtthatóinak a sorozata szabja meg:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

d) Ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

határérték, akkor ez a hatványsor konvergenciasugarát adja.

3. Analitikus függvények

a) Egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor az $|x| < R$ konvergenciatartományán belül eső minden $|x| \leqq \varrho < R$ intervallumban egyenletesen konvergens.

a) Egy $|x| < R$ közön (ahol $R = \infty$ is lehet, de a zérustól mindenesetre különböző) hatványsorral előállítható, hatványsorba fejthető

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvényt *analitikus függvénynek* nevezünk.

c) Analitikus függvény hatványsorának konvergencia-intervallumában folytonos.

d) Analitikus függvény hatványsorának konvergencia-intervallumában integrálható. Integrálja hatványsorának tagonkénti integrálásával adódik.

e) Analitikus függvény hatványsorának konvergencia-intervallumában akárhányszor differenciálható. Különöböző rendű deriváltjai hatványsorának megfelelő számban való és tagonkénti differenciálásával adódnak.

f) Ha egy $f(x)$ függvény az $x = 0$ környezetében analitikus, más szóval ott

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mintára egy konvergens hatványsorba fejthető, akkor csakis egybe, nevezetesen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Taylor-sorába fejthető.

3. §. Néhány fontosabb sorfejtés

1. Hatványsorok

A *binomiális sor:*

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

A *geometriai sor:*

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots, \quad |x| < 1.$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + - \ldots, \quad |x| < 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + - \ldots, \quad |x| < 1.$$

$$\sqrt[3]{1 + x} = 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} x^4 + - \ldots, \quad |x| < 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad |x| < \infty.$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \dots, \quad |x| < \infty, \quad a > 0.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots, \quad -1 < x \leqq 1.$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \dots, \quad 0 < x \leqq 2.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots, \quad |x| < \infty.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots, \quad |x| < \infty.$$

$$\operatorname{Arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots, \quad |x| \leqq 1.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad |x| < \infty.$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad |x| < \infty.$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots, \quad 0 < |x| < \pi.$$

2. Gauss-féle hibaintegrál

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + - \dots\right), \quad |x| < \infty.$$

3. Integrálszinusz-függvény

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\,!\,3} + \frac{x^5}{5\,!\,5} - + \ldots, \quad |x| < \infty.$$

4. Integrál-logaritmus-függvény

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x} = C + \ln|\ln x| +$$

$$+ \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\,!\,2} + \frac{(\ln x)^3}{3\,!\,3} + \ldots, \quad 0 < x < 1,$$

ahol

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}577\,215\,66\ldots$$

az ún. *Euler—Mascheroni-féle állandó.*

5. Elliptikus integrálok

a) *Első fajú elliptikus integrál Legendre-féle normálalakja:*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi).$$

b) *Másodfajú elliptikus integrál Legendre-féle normálalakja:*

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(k,\varphi).$$

Itt $x = \sin\varphi$; $k^2 < 1$. φ az elliptikus integrál *amplitudója* és k a *modulusa.*

c) $$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots\right);$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right).$$

6. Riemann-féle zétafüggvény

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots, \quad s > 1.$$

7. Néhány közelítő formula

Elegendő kicsiny x értékek mellett, jó közelítéssel:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x. \quad \sin x \approx \mathrm{tg}\,x \approx \mathrm{sh}\,x \approx \mathrm{Arc\,sin}\,x \approx \mathrm{Arc\,tg}\,x \approx x.$$

$$(1+x)^m \approx 1 + m\,x. \qquad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x. \qquad \mathrm{ch}\,x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x. \qquad e^x \approx 1 + x.$$

$$\operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x}. \qquad \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2.$$

8. Néhány fontosabb sorösszeg

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots \quad \textit{(Leibniz-féle sor)}.$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1}{5\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{1}{7\cdot 2^3} + \ldots$$

4. §. Fourier-sorok

1. Definíció

Trigonometrikus sornak vagy *Fourier-sornak* nevezzük a következő alakú végtelen sort:

$$f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

2. A Fourier-sor együtthatói

Ha az $f(x)$ függvény Fourier-sora a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ intervallumban egyenletesen konvergens, akkor az *Euler—Fourier-féle képletek* alapján:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

3. Fourier-sor konvergenciája

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ és $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$, tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ numerikus sor konvergens, akkor az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sor minden x-re abszolút és egyenletesen konvergens.

4. Dirichlet feltétele

Ha a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ intervallum véges számú olyan részintervallumra bontható, melyekben az $f(x)$ függvény deriváltjával együtt folytonos, akkor ezen intervallum minden x_0 helyén a Fourier-sora konvergens és Fourier-sorának összege a folytonossági helyen magát az $f(x_0)$ függvényértéket, a szakadási helyen pedig a függvény jobb- és baloldali határértékének számtani középértékét $\left(\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right)$ állítja elő. A Fourier-sor egyenletesen konvergens minden olyan zárt intervallumban, ahol $f(x)$ folytonos.

IX. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

1. §. Többváltozós függvények fogalma

1. A többváltozós függvény

a) A *többváltozós függvény* a függő változó és a független változók közti olyan (bizonyos módon megadott) összefüggés, amely az utóbbiaknak minden megengedett értékrendszeréhez (értékpárjához, értékhármasához, . . . , érték-n-eséhez) meghatározott függvényértékeket rendel:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

b) Ha a független változók minden egyes megengedett értékrendszeréhez (minden szám-n-eshez) a függő változó egyetlen meghatározott értékét rendeljük hozzá, a függvényt *egyértékűnek* nevezzük. Különben a függvény *többértékű.*

c) A többváltozós függvényeknél szereplő függvénykapcsolatok konkrét megadási módjai megegyeznek az egyváltozós függvényeknél alkalmazottakkal. Így a többváltozós függvény is megadható *képlettel (analitikus megadási mód), értéktáblázattal, grafikonnal.* Az analitikus megadási mód — ugyanúgy, mint egyváltozós esetben — lehet *explicit, implicit* vagy *paraméteres.*

2. Értelmezési tartomány

A független változók megengedett értékrendszereinek azon összessége, melyekhez a függvénykapcsolat szerint meghatározott függvényértékek tartoznak, alkotja a függvény *értelmezési tartományát.*

Az értelmezési tartomány lehet zárt vagy nyílt aszerint, hogy a tartomány határa is hozzátartozik-e vagy sem.

3. Határérték, folytonosság

a) Az n-változás

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$$

függvénynek az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen van *határértéke,* és ez b, jelekben

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{X \to A} f(X) = b,$$

ha bármely tetszőlegesen kicsiny, előre megadott $\varepsilon > 0$ számhoz tartozik egy olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon,$$

hacsak

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \delta.$$

b) Az *n*-változós

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X)$$

függvényt az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen *folytonosnak* mondjuk, ha itt van határértéke, és az megegyezik a függvény helyettesítési értékével, azaz

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots\dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

vagy a rövidebb jelölést alkalmazva:

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

4. Többváltozós függvények szemléltetése

a) *Kétváltozós függvények szemléltetése.* Egy térbeli koordináta-rendszerben az x és y független változók egy bizonyos — a függvény értelmezési tartományához tartozó — értékpárja az (x, y) számpár által az (x, y) síkon kijelölt ponthoz hozzárendeljük az (egyértékűnek feltételezett) függvény által meghatározott z koordinátát: $z = f(x, y)$. E három összetartozó szám (koordináta) egy térbeli pontot — folytonos $f(x, y)$ esetén a függvényt szemléltető *felület* egy pontját — határozza meg.

Ha a térbeli koordináta-rendszerben a kétváltozós függvény által meghatározott felületet a független változók koordinátasíkjával párhuzamos (egyenlő távolságra levő) síkokkal elmetsszük (e síkok egyenlete: $z =$ állandó), és a nyert metszetgörbéket merőlegesen a független változók síkjára vetítjük, nyerjük a kétváltozós függvény *szintvonalas ábráját*. Ha e szintvonalak mindegyikét a megfelelő $z =$ állandó számmal megjelöljük, a függvényt szemléltető szintvonalak kottázott görbeseregét kapjuk. (Ez a szemléltetés egyébként megfelel annak, ahogyan egy egyváltozós függvényt kottázott skálával lehet ábrázolni.)

b) *Háromváltozós függvény szemléltetése.* Az $u = f(x, y, z)$ háromváltozós függvény a független változók (x, y, z) koordináta-rendszerében levő térbeli tartomány egyes pontjaihoz meghatározott függvényértékeket rendel hozzá. Ha feltesszük, hogy e függvény egyértékű és folytonos, és az u függő változónak különböző, állandó értékeket adva, az így előálló, összesen csak három változót tartalmazó függvényeket egy-egy felülettel szemléltetjük, a háromváltozós függvény ún. *szintfelületes* térbeli képét kapjuk. (Itt persze hallgatólag feltesszük azt, hogy az $f(x, y, z) =$ állandó összefüggés a z-t mint az x és y független változók egyértékű és folytonos függvényét határozza meg implicit alakban.)

c) *Pontfüggvény.* Az n-változós függvényt pontfüggvénynek tekinthetjük, ha az n független változót az n méretű tér egy pontja koordinátáinak tekintjük: $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A függő változó, a függvény által meghatározott módon függ az n méretű tér pontjaitól:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(X).$$

A függvény az n méretű tér bizonyos (az értelmezési tartományban fekvő) pontjaihoz meghatározott függvényértékeket rendel hozzá.

2. §. Parciális derivált

1. Definíció

Az n változós $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(X)$ függvényt az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen (az $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pontban) x_i szerint *differenciálhatónak* mondjuk, ha az egyváltozós

$$y = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

függvény az $x_i = a_i$ helyen differenciálható. E függvény deriváltját az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen vett x_i szerinti *parciális deriváltjának* nevezzük:

$$f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + \Delta x, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{\Delta x_i}.$$

2. A parciális derivált jelentése

a) Az $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ helyen vett x_i szerinti parciális deriváltja a függvény helyi (lokális) viszonylagos (relatív) értékváltozását méri az x_i változó növekedésének irányában. A pozitív előjel azt jelenti, hogy ez az értékváltozás növekedés, a negatív előjel pedig értékcsökkenést jelent.

b) A kétváltozós $z = f(x, y)$ függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjai geometriailag a függvény által meghatározott felület adott pontján áthaladó és az (x, z), illetve (y, z) síkkal párhuzamos metszetgörbék érintőinek az iránytangenseit határozzák meg.

3. Parciális differenciál

Ha az $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvénynek létezik az x_i szerinti parciális deriváltja, akkor e független változó szerinti parciális differenciálját úgy értelmezhetjük, mint a

$$\Delta_{x_i} y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)$$

parciális növekménynek a $\Delta x_i = dx_i$ növekménnyel arányos fő részét:

$$d_{x_i} y = f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i.$$

Eszerint a többváltozós függvénynek bármely változó szerinti parciális differenciálja egyenlő a függvény megfelelő parciális deriváltjának és ezen változó differenciáljának a szorzatával.

A parciális differenciál értelmezése alapján a parciális deriváltat a fenti módon értelmezett differenciálok hányadosának tekinthetjük:

$$f'_{x_i} = \frac{d_{x_i} y}{dx_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

4. Differenciálhatóság. Véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség. Teljes differenciál

a) Az $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ helyen *differenciálhatónak* nevezzük, ha találunk n olyan a Δx_i-ktől független $f'_{x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kifejezést, hogy a függvény teljes megváltozása

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) -$$
$$- f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_1} \Delta x_1 + f'_{x_2} \Delta x_2 + \ldots + f'_{x_n} \Delta x_n +$$
$$+ \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \ldots + \varepsilon_n \Delta x_n$$

legyen, ahol

$$\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0,\ \ldots,\ \varepsilon_n \to 0,$$

hacsak

$$\Delta x_1 \to 0,\ \Delta x_2 \to 0,\ \ldots,\ \Delta x_n \to 0.$$

b) Egy többváltozós függvény (teljes) differenciálhatóságából következik a független változói szerinti parciális differenciálhatósága. Ez a tétel azonban általában nem fordítható meg. Mindenesetre azonban fennáll a következő tétel:

Egy többváltozós függvény egy helyen bizonyára differenciálható, ha független változói szerint e hely környezetében parciálisan differenciálható, és e parciális deriváltak mint többváltozós függvények e helyen folytonosak. A függvényt ebben az esetben „folytonosan" differenciálhatónak nevezzük.

c) Ha az $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont elegendő kicsiny környezetére szorítkozunk, azaz

$$\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2} \approx 0,$$

akkor

$$\Delta y \approx dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n,$$

tehát a függvény teljes megváltozása jó közelítéssel helyettesíthető e megváltozás fő részével, a függvény ún. *teljes (totális) differenciáljával.* Ez a közelítő egyenlőség az ún. véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség (véges növekmények tétele).

A többváltozós függvény teljes differenciálja egyenlő a parciális differenciáljainak összegével.

Megjegyzendő, hogy ha a többváltozós függvény egy helyen az összes változói szerint folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik, akkor ott létezik a teljes differenciálja.

5. A kétváltozós függvényre vonatkozó véges növekmények tételének geometriai jelentése

A kétváltozós $z = f(x, y)$ függvény esetében a véges növekményekre vonatkozó közelítő egyenlőség geometriailag azt fejezi ki, hogy a $z = f(x, y)$ függvény által meghatározott felületet az (x_0, y_0) helyhez tartozó pontja környezetében érintősíkjával helyettesítjük:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

A $z = f(x, y)$ felületnek az (x_0, y_0) helyhez tartozó pontjában az *érintősíkját* ugyanis a következő egyenlet határozza meg:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

6. Iránymenti derivált

a) A kétváltozós $z = f(x, y)$ függvény változását vizsgáljuk egy, az (x, y) síkban fekvő (x_0, y_0) pontból kiinduló és az x tengely pozitív szárával α szöget bezáró t félegyenes mentén. A függvény t iránymenti deriváltján a következő határértéket értjük:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta t \cos\alpha, y_0 + \Delta t \sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\Delta t} = f_x'(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

b) A háromváltozós $u = u(x, y, z)$ függvénynek az (x_0, y_0, z_0) pontban a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ iránykoszinuszokkal meghatározott t iránymenti deriváltján a következő határértéket értjük:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta t\cos\alpha,\ y_0 + \Delta t\cos\beta,\ z_0 + \Delta t\cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta t} =$$

$$= u_x'(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + u_y'(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + u_z'(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.$$

(Itt $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.)

c) Ha a választott t irány a kétváltozós függvény szintvonala érintőjének irányával vagy a háromváltozós függvény szintfelülete érintősíkjával párhuzamos, akkor az iránymenti derivált értéke zérus. A szintvonalra, illetve szintfelületre merőleges irányban viszont a legnagyobb abszolút értékű az iránymenti derivált.

Az iránymenti derivált a függvény értékváltozási sebességét méri a választott irányban.

7. Összetett függvények

a) Legyen a $z = f(x, y)$ függvényben $x = x(t)$ és $y = y(t)$. Ekkor

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

b) Legyen a $z = f(x, y)$ függvényben $x = x(u, v)$ és $y = y(u, v)$. Ekkor

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

8. Implicit függvények

a) Ha az (x_0, y_0) helyen, illetve ennek környezetében az $F(x, y)$ függvény az

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. F folytonosan differenciálható,
3. $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$

feltételeknek eleget tesz, akkor az x_0 hely kis környezetében egy és csakis egy olyan

$$y = y(x)$$

egyértékű, folytonosan differenciálható függvény van, amelyre nézve

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{és} \quad F[x, y(x)] \equiv 0.$$

Ez esetben

$$y'(x) = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

b) Ha az $(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ helyen, illetve ennek környezetében az $F(x, y, \ldots, t, u)$ függvény az

1. $F(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0) = 0$, 2. F folytonosan differenciálható,
3. $F_u'(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0) \neq 0$

feltételeknek eleget tesz, akkor az $(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ hely kis környezetében egy és csakis egy olyan

$$u = u(x, y, \ldots, t)$$

egyértékű, folytonosan differenciálható függvény van, amelyre nézve

$$u(x_0, y_0, \ldots, t_0) = u_0 \quad \text{és} \quad F[x, y, \ldots, t, u(x, y, \ldots, t)] \equiv 0.$$

Ez esetben

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \ldots, \quad u'_t = -\frac{F'_t}{F'_u}.$$

9. Magasabbrendű parciális deriváltak

a) *Definíció.* Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjainak további parciális deriváltjai (feltéve, hogy ezek is léteznek) adják a függvény másod-, harmad-, ..., általában m-ed rendű parciális deriváltjait.

Az adott függvényt az x_i változó szerint egymás után m-szer parciálisan deriválva, kapjuk a függvény ún. m-edik x_i szerinti *tiszta parciális deriváltját:*

$$f^{(m)}_{x_i^m} = \frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}.$$

Ha a magasabbrendű parciális derivált képzésénél különböző változók szerint differenciálunk parciálisan, pl. az x_i változó szerint k-szor, az x_j változó szerint $(m-k)$-szor, nyerjük a függvény m-ed rendű *vegyes parciális deriváltjait:*

$$f^{(m)}_{x_i^k x_j^{m-k}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_j^{m-k} \partial x_i^k},$$

vagy

$$f^{(m)}_{x_j^{m-k} x_i^k} = \frac{\partial^m f}{\partial x_i^k \partial x_j^{m-k}}.$$

b) *Schwarz (Young) tétele.* A többváltozós függvény ugyanazon változók szerinti m-ed rendű vegyes parciális deriváltjai egymással megegyeznek, függetlenül a differenciálás sorrendjétől, feltéve, hogy e parciális deriváltak folytonosak:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_j^{m-k} \partial x_i^k} = \frac{\partial^m f}{\partial x_i^k \partial x_j^{m-k}}.$$

10. Magasabbrendű differenciálok

A többváltozós $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény *m-ed rendű (teljes) differenciálja:*

$$d^m y = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right]^m y.$$

Itt a zárójeles kifejezést egyszerűen formálisan m-edik hatványra kell emelni, majd az egyes tagokban szereplő $\frac{\partial^m}{\partial x_i^k \partial x_i^{m-k}}$ „tényezőket" az y-nal megszorozni:

$$\frac{\partial^m}{\partial x_i^k \partial x_i^{m-k}} y = \frac{\partial^m y}{\partial x_i^k \partial x_i^{m-k}}.$$

Pl. a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény esetében:

$$d^m z = \left[\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right]^m z = \frac{\partial^m z}{\partial x^m} dx^m + \binom{m}{1} \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1} \partial y} dx^{m-1} dy +$$

$$+ \binom{m}{2} \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-2} \partial y^2} dx^{m-2} dy^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} \frac{\partial^m z}{\partial x \partial y^{m-1}} dx\, dy^{m-1} + \frac{\partial^m z}{\partial y^m} dy^m.$$

3. §. Függvényrendszerek. Transzformációk (leképzések)

1. Függvényrendszerek

A

síkban x, y, térben x, y, z

független változóknak

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}\right\}, \quad \text{illetve} \quad \left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned}\right\}$$

függvényei függvényrendszert alkotnak. E függvényrendszer kétféleképpen értelmezhető:

a) mint leképezés;

b) mint általános görbe vonalú koordinátákra való transzformáció.

a) *Leképezések.* Az

(x, y) sík, illetve (x, y, z) tér

mindegyik

$P(x, y)$, illetve $P(x, y, z)$

pontjának van egy megfelelője az

(u, v) síkban, illetve (u, v, w) térben,

a

$Q(u, v)$, illetve $Q(u, v, w)$

pont. Az adott függvényrendszer leképezi az

(x, y) sík, illetve (x, y, z) tér

pontjait az

(u, v) sík, illetve (u, v, w) tér

pontjaira. Ha az

(x, y) sík, illetve (x, y, z) tér

különböző pontjainak az

(u, v) síkon, illetve (u, v, w) térben

különböző pontok felelnek meg, akkor a leképezés egyértelmű (egyrétű). Ha továbbá, értelmezhető az

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}\right\}, \quad \text{illetve} \quad \left.\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned}\right\}$$

függvényrendszer is, mely szintén egyértelmű, és az előbbi leképezés inverzét jelenti, akkor a leképezést kölcsönösen megfordíthatónak és egyértelműnek nevezzük.

A leképezés szemléltetésének egyik módja az, hogy meghatározzuk az

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{állandó} \\ y &= \text{állandó} \end{aligned}\right\} \text{koordináta-egyeneseknek, illetve} \quad \left.\begin{aligned} x &= \text{állandó} \\ y &= \text{állandó} \\ z &= \text{állandó} \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{koordináta-}\\ \text{síkoknak}\end{gathered}$$

a képeit az

(u, v) képsíkon, illetve (u, v, w) képtérben.

Az

(x, y) sík, illetve (x, y, z) tér

derékszögű

négyszöges, illetve paralelepipedonos

koordináta-hálózatának megfelel egy

görbe vonalú, illetve görbe felületekből álló

hálózat az

(u, v) síkon, illetve (u, v, w) térben, és megfordítva.

b) *Görbe vonalú koordináták.* Az adott

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}\right\}, \quad \text{illetve} \quad \left.\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned}\right\}$$

függvényrendszer esetén minden

(x, y) síkbeli $P(x, y)$, illetve (x, y, z) térbeli $P(x, y, z)$

pont

(x, y), illetve (x, y, z)

koordinátáin kívül, a megfelelő

(u, v), illetve (u, v, w)

koordinátákkal is jellemezhető. Az

(u, v), illetve (u, v, w)

koordinátákhoz tartozó P pont az

$$(x, y) \text{ síkban, illetve } (x, y, z) \text{ térben}$$

azonnal megkereshető, ha előre meghatározzuk az

$$\left.\begin{array}{l} u(x, y) = \text{állandó} \\ v(x, y) = \text{állandó} \end{array}\right\} \text{görbeseregeket, illetve } \left.\begin{array}{l} u(x, y, z) = \text{állandó} \\ v(x, y, z) = \text{állandó} \\ w(x, y, z) = \text{állandó} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{felület-}\\ \text{seregeket.}\end{array}$$

E görbeseregek vonalai, illetve felületseregek két-két felületének a metszésvonalai az (x, y) sík görbe vonalú (u, v), illetve (x, y, z) tér görbe vonalú (u, v, w) koordinátavonalai. Így a P pontot meghatározó

$$(u, v), \qquad \text{illetve } (u, v, w)$$

számok e pont görbe vonalú koordinátái.

2. Jacobi-féle (függvény-) determináns

A kölcsönösen megfordítható, egyértelmű leképezhetőség szükséges (és kicsinyben elégséges) feltétele az, hogy az

$$\left.\begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array}\right\}, \quad \text{illetve} \quad \left.\begin{array}{l} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{array}\right\}$$

függvényrendszer egyes függvényeinek folytonos elsőrendű parciális deriváltjaik legyenek, továbbá a függvényrendszer

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ún. *Jacobi-féle determinánsa (függvénydeterminánsa)* zérustól különböző legyen.

Az inverz leképezést előállító

$$\left.\begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array}\right\}, \quad \text{illetve} \quad \left.\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array}\right\}$$

függvényrendszer függvénydeterminánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Fennáll, hogy

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1.$$

4. §. Taylor tétele. Középértéktétel

1. Taylor tétele

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_m + h_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) +$$

$$+ \frac{1}{1!}\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right] f(x_1, x_2, \ldots, x_m) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + R_n,$$

ahol a maradéktag

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{n+1} f(x_1 + \vartheta h_1, x_2 + \vartheta h_2, \ldots, x_m + \vartheta h_m),$$

$$0 < \vartheta < 1.$$

(A $\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ jelölés értelmezését lásd a IX. 2. § 10-ben. A maradéktag kifejezésében az egyes parciális deriváltakat az $(x_1 + \vartheta h_1, x_2 + \vartheta h_2, \ldots, x_m + \vartheta h_m)$ helyen kell venni!)

2. Középérték-tétel

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_m + h_m) - f(x_1, x_2, \ldots x_m) =$$
$$= h_1 f'_{x_1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) + h_2 f'_{x_2}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) + \ldots$$
$$\ldots + h_m f'_{x_m}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m),$$

ahol

$$\xi_i = x_i + \vartheta h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad 0 < \vartheta < 1.$$

5. §. Felületi pontok osztályozása. Szélső értékek

1. Felületi pontok osztályozása

A $z = f(x, y)$ kétváltozós függvénnyel megadott felületnek (x, y) helyhez tartozó pontja — feltételezve azt, hogy a függvény folytonos másodrendű parciális deriváltakkal rendelkezik —

hiperbolikus, ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$,
parabolikus, ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} = 0$,
elliptikus, ha $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$.

Ez utóbbi esetben a felület „alulról nézve" konvex, ha $f''_{xx} > 0$ és $f''_{yy} > 0$; „felülről nézve" konvex, ha $f''_{xx} < 0$ és $f''_{yy} < 0$.

2. Kétváltozós függvény helyi szélső értéke

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek valamely (x, y) helyhez tartozó pontjában *helyi szélső értéke van,* ha ott a felület érintősíkja párhuzamos az (x, y) síkkal, és a felületi pont elliptikus. Tehát, ha valamely (x, y) helyen

$$f'_x = 0 \quad \text{és} \quad f'_y = 0,$$

továbbá

$$f''_{xx} f''_{yy} - f''^{2}_{xy} > 0,$$

akkor ott a függvénynek helyi szélső értéke van; mégpedig amennyiben $f''_{xx} > 0$ és $f''_{yy} > 0$, akkor *minimuma;* ha $f''_{xx} < 0$ és $f''_{yy} < 0$, akkor *maximuma* van.

3. Többváltozós függvények helyi szélső értéke

Ahhoz, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ többváltozós függvénynek az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ helyen helyi szélső értéke legyen, szükséges és elégséges, hogy ott

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ legyen;

2. a következő (ún. *Hesse-féle*) *determinánsban:*

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{ahol} \quad p_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k},$$

az összes párosrendű sarokaldeterminánsok pozitívok legyenek, és a páratlanrendű sarokaldeterminánsok előjele p_{11} előjelével egyezzék meg. Ha ilyen körülmények között $p_{11} > 0$, akkor a függvénynek a vizsgált helyen helyi minimuma van, ha pedig $p_{11} < 0$, akkor helyi maximuma van.

Az egymás után következő első-, másod-, harmad-, ..., $(n - 1)$-ed, n-ed rendű *sarokaldeterminánsok* a következők:

$$p_{11}; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}; \ldots;$$

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1(n-1)} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{(n-1)1} & p_{(n-1)2} & \cdots & p_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Feltételes szélső értékek

Feltételes szélső érték számításánál az

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

függvény szélső értékeit úgy kell meghatároznunk, hogy a függvény változói közben eleget tegyenek a

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \; \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \; \ldots; \; \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

egyenletekkel meghatározott *mellékfeltételeknek*. Itt feltesszük azt, hogy az $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ függvények az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ változók változásának egész tartományában első és második parciális deriváltakkal rendelkeznek.

A feladat megoldására alkalmas a *Lagrange-féle multiplikátorok módszere*. Eszerint a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ határozatlan állandók bevezetésével a kötött (feltételes) szélsőérték-feladatot az

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_k \varphi_k$$

újonnan bevezetett függvény szabad szélsőérték-feladatára vezetjük vissza.

X. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

1. §. Paraméteres integrál

1. Kétváltozós függvény egyik változó szerinti integrálja

a) Legyen $z = f(x, y)$ a

$$T : a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

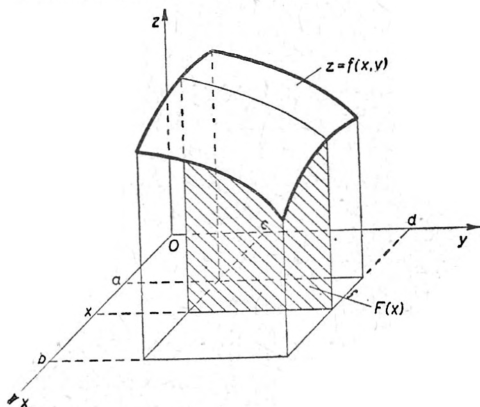
tartományban folytonos és egyértékű függvény. Az x = állandó sík az e függvényt ábrázoló felületet egy

$$z = f(x = \text{állandó}, y)$$

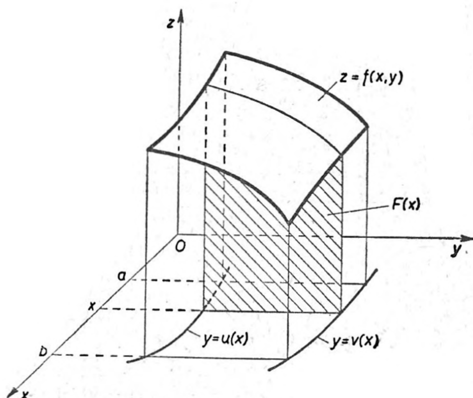
egyenletű síkgörbében metszi. E síkgörbe „alatti" terület (18. ábra):

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Ha x helyébe egy másik állandót írunk, egy hasonló integrálra jutunk. Egy integrálnál tehát ugyan x állandó, de integrálról integrálra változik; az integrál az x paraméter függvénye, ún. *paraméteres integrál.* $z = f(x, y)$ folytonossága következtében $F(x)$ az x-nek folytonos függvénye.



18. ábra



19. ábra

b) A paraméteres integrál akkor is folytonos, ha határai nem állandók, hanem az a és b között az x paraméternek folytonos, egyértékű függvényei, vagyis ha a T tartományt az $x = a$, $x = b$ egyenesek mellett az $y = u(x)$, $y = v(x)$ folytonos görbék határolják (19. ábra):

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy.$$

2. Paraméteres integrál paraméter szerinti differenciálása

Ha a T tartományban $f(x, y)$ az x szerint még differenciálható is, és az f'_x parciális derivált e tartományban folytonos, továbbá a határok is x-nek differenciálható függvényei, akkor a paraméteres integrál a paraméter szerint differenciálható.

a) Állandó határok mellett:

$$\frac{d}{dx}\int_{c}^{d} f(x, y)\, dy = \int_{c}^{d} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy,$$

azaz a differenciálás egyszerűen az integrálás jele alatt elvégezhető.

b) Változó határok esetén *(Leibniz szabálya)*:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy + f[x, v(x)]\frac{dv}{dx} - f[x, u(x)]\frac{du}{dx}.$$

2. §. Tartományintegrálok

1. Definíció

Valamely mérhető T tartomány P pontjaiban értelmezett $f(P)$ egyértékű és folytonos, vagy legalábbis integrálható (azaz korlátos és olyan, hogy a T elég kis átmérőjű részekre bontásánál a T ama részeinek összes mértéke, melyekben $f(P)$ nem folytonos, előírtan kicsinnyé tehető) függvénynek e tartományra kiterjesztett integrálján azt a határértéket értjük, amelyhez a

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta T_i$$

összeg tart, ha a ΔT_i mértékű résztartományok legnagyobb átmérője zérushoz tart, azaz, ha a T tartomány résztartományokra osztását minden határon túl finomítjuk úgy, hogy valamennyi rész átmérője zérushoz konvergáljon, és ezzel egyidejűleg a résztartományok száma minden határon túl növekedjék. Itt P_i jelenti az i-edik résztartomány egy tetszés szerinti pontját:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta T_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta T_i = \int_{T} f(P)\, dT.$$

A gyakorlatban előforduló tartományintegrálok T integrálási alaptartománya egy, két vagy három méretű szokott lenni. Ha a T alaptartomány egy méretű, azaz egy L *vonaldarab* (speciálisan egyenesdarab), akkor a tartományintegrál egy *közönséges egyszeres integrál:*

$$\int_{L} f(P)\, ds.$$

Ha a T alaptartomány két méretű, azaz egy F *felületdarab* (speciálisan síkrész), akkor a tartományintegrál egy *kettős integrál:*

$$\iint_{F} f(P)\, dF.$$

Ha a T alaptartomány három méretű, azaz egy V *térrész*, akkor a tartományintegrál egy *hármas integrál*:

$$\iiint_T f(P)\, dV.$$

2. Tartomány-integrálok alaptulajdonságai

a) Véges számú $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)$ függvény összegének a T tartományra kiterjesztett integrálja egyenlő az összeadandó függvények tartományintegráljainak összegével:

$$\int_T \{f_1(P) + f_2(P) + \ldots + f_n(P)\}\, dT =$$

$$= \int_T f_1(P)\, dT + \int_T f_2(P)\, dT + \ldots + \int_T f_n(P)\, dT.$$

b) Az integrálandó függvény állandó együtthatója kiemelhető az integráljel elé:

$$\int_T c \cdot f(P)\, dT = c \int_T f(P)\, dT.$$

c) Ha a T tartományt a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ résztartományokra lehet felosztani úgy, hogy $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, akkor

$$\int_T f(P)\, dT = \int_{T_1} f(P)\, dT + \int_{T_2} f(P)\, dT + \ldots + \int_{T_n} f(P)\, dT.$$

d) Ha a T tartományban $|f(P)| \leqq M$, és a tartomány mértéke $\int dT = T$, akkor fennáll:

$$\left| \int_T f(P)\, dT \right| \leqq \int_T |f(P)|\, dT \leqq MT.$$

e) Ha $f(P)$ és $g(P)$ két folytonos függvény, és a T-ben egyenletesen

$$|f(P) - g(P)| < \varepsilon,$$

akkor

$$\left| \int_T f(P)\, dT - \int_T g(P)\, dT \right| = \left| \int_T [f(P) - g(P)]\, dT \right| \leqq \varepsilon\, T,$$

ami ε-nal együtt a zérushoz tart. Tehát a tartományintegrál az integrálandó függvénnyel együtt folytonosan változik.

f) Ha $T = T' + T''$ és T'' mértéke ε, továbbá $|f(P)| \leqq M$, akkor

$$\left| \int_T f(P)\, dT - \int_{T'} f(P)\, dT \right| = \left| \int_{T''} f(P)\, dT \right| \leqq \varepsilon\, M,$$

ami ε-nal együtt a zérushoz tart. Tehát a tartományintegrál az integrálási tartománnyal együtt folytonosan változik.

3. Középértéktétel

a) Ha $f(P)$ és $p(P)$ a T tartományban folytonos, és $p(P)$ az előjelét nem váltja T-ben, akkor

$$\int_T f(P)\, p(P)\, dT = f(P_k) \int_T p(P)\, dT,$$

illetve

$$f(P_k) = \frac{\int_T f(P)\, p(P)\, dT}{\int_T p(P)\, dT},$$

ahol $f(P_k)$ az f függvénynek minimuma és maximuma között fekvő, a T tartomány legalább egyik P_k helyén felvett értéke, az f függvénynek e T tartományra vonatkozó, *$p(P)$ súllyal képezett középértéke.*

b) Ha speciálisan $p(P) \equiv 1$, akkor

$$f(P_k) = \frac{1}{T} \int_T f(P)\, dT.$$

4. Tartomány szerinti differenciálás

Ha a folytonos $f(P)$ függvénynek egy, a P_0 pontot tartalmazó ΔT tartományra vonatkozó középértékét képezzük, s azután a $\Delta T \to 0$ határátmenetet elvégezzük, akkor $f(P_k) \to f(P_0)$ miatt

$$f(P_0) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} f(P)\, dT.$$

Ezt a határátmenetet a *tartományintegrál tartomány szerinti differenciálásának* nevezzük. Fennáll tehát a következő tétel:

Folytonos függvény tartományintegrálja differenciálható tartományfüggvény és egy pontbeli deriváltja az integrálandó függvény e pontban felvett értékével egyenlő.

3. §. Kettős és hármas integrálok

1. Kettős integrál definíciója

Legyen $z = f(P) \equiv f(x, y)$ egy az (x, y) sík mérhető T tartományán értelmezett egyértékű, folytonos függvény. E függvénynek a T tartományra kiterjesztett integrálját úgy értelmezhetjük, hogy a tartományt koordináta-vonalakkal (koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel) részekre osztjuk. Egy ilyen résztartomány a $\Delta x_i\, \Delta y_k$ területű derékszögű négyszög. E négyszög egy tetszés szerinti pontja a $P(\xi_i, \eta_k)$ pont. Meghatározás szerint a

$$\sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_k$$

összeg határértéke, a $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_k \to 0$ határátmenet mellett, a függvény T tartományra kiterjesztett kettős integrálja:

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_k = \iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f(P)\, dT.$$

2. Hármas integrál definíciója

A $z \equiv f(P) = f(x, y, z)$ egyértékű, folytonos függvénynek a mérhető, három méretű V (köbtartalommal bíró) tartományra kiterjesztett integrálját úgy értelmezhetjük, hogy a tartományt koordináta-felületekkel (koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal) részekre osztjuk. Egy ilyen résztartomány a $\Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$ köbtartalmú derékszögű paralelepipedon. E paralelepipedon egy tetszés szerinti pontja a $P(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ pont. Meghatározás szerint a

$$\sum_i \sum_j \sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$$

összeg határértéke, a $\max \Delta x_i \to 0$, $\max \Delta y_j \to 0$, $\max \Delta z_k \to 0$ határátmenet mellett, a függvény V tartományra kiterjesztett hármas integrálja:

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f(P)\, dV.$$

3. Kettős integrál kiszámítása kétszeres integrálással

a) Legyen $f(x, y)$ a

$$T: a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d \qquad \text{(20. ábra)}$$

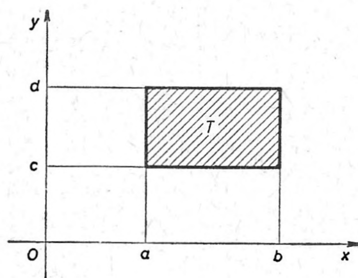
derékszögű négyszögön folytonos, akkor

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx.$$

Ha speciálisan $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$, akkor

$$\iint_T \varphi(x) \cdot \psi(y)\, dx\, dy = \int_a^b \varphi(x)\, dx \cdot \int_c^d \psi(y)\, dy.$$



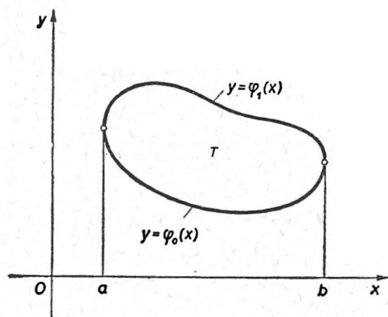
20. ábra

b) Határolják a T tartományt az

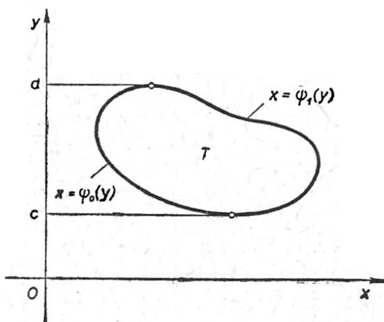
$$y = \varphi_0(x), \quad y = \varphi_1(x), \quad (a \leqq x \leqq b) \qquad \text{(21. ábra)}$$

illetve

$$x = \psi_0(y), \quad x = \psi_1(y), \quad (c \leqq y \leqq d) \qquad \text{(22. ábra)}$$



21. ábra



22. ábra

egyrétű, folytonos görbék. Ha $f(x, y)$ e tartományban folytonos, akkor

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \int_a \Big[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\, dy \Big] dx = \int^d \Big[\int_{\psi_0(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y)\, dx \Big] dy.$$

4. Hármas integrál kiszámítása háromszoros integrálással

a) Legyen $f(x, y, z)$ a

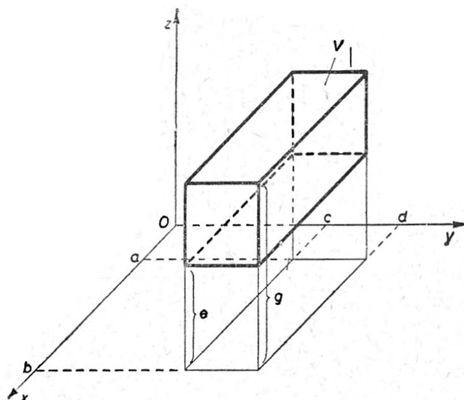
$$V: a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d, \quad e \leqq z \leqq g$$

(23. ábra) derékszögű paralelepipedonban folytonos, akkor

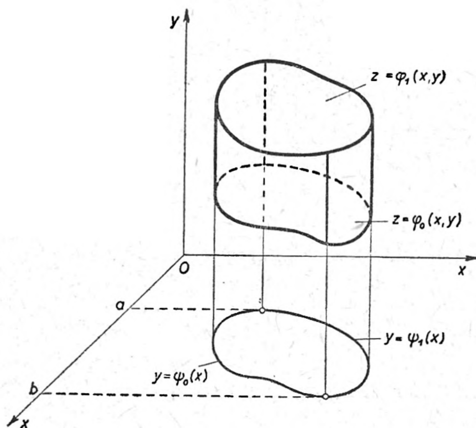
$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_e^g \Big\{ \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y,z)\, dx \Big] dy \Big\} dz = \int_c^d \Big\{ \int_e^g \Big[\int_a^b f(x,y,z)\, dx \Big] dz \Big\} dy \text{ stb.}$$

b) Határolják a V térrészt a

$$z = \varphi_0(x, y), \quad z = \varphi_1(x, y), \quad \begin{vmatrix} \psi_0(x) \leqq y \leqq \psi_1(x) \\ a \leqq x \leqq b \end{vmatrix} \quad \text{(24. ábra)}$$



23. ábra



24. ábra

folytonos, egyrétű felületek, akkor

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \Big\{ \int_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} \Big[\int_{\varphi_0(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} f(x, y, z)\, dz \Big] dy \Big\} dx.$$

4. §. Az integrációs változók transzformációja

1. Kettős integrál változóinak transzformációja

A

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrálban az

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

függvények közvetítésével vezessük be az u, v új változókat. Ezt megtehetjük, ha e függvényrendszer kölcsönösen megfordítható, és egyértelmű módon képezi le egymásra az (x, y) sík T tartományát az (u, v) sík T' tartományára. Ennek szükséges és kicsinyben elégséges feltétele, hogy e függvényrendszer

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobi-féle determinánsa (függvénydeterminánsa) zérustól különböző legyen. Ekkor

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T'} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

2. Hármas integrál változóinak transzformációja

A

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

hármas integrálban az

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

függvények közvetítésével vezessük be az u, v, w új változókat. Ha e függvényrendszer kölcsönösen megfordítható, és egyértelmű módon képezi le az (x, y, z) koordinátarendszer V térrészét az (u, v, w) koordináta-rendszer V' térrészére, aminek szükséges és kicsinyben elégséges feltétele az, hogy a függvényrendszer

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Jacobi-féle determinánsa (függvénydeterminánsa) zérustól különböző legyen, akkor

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw.$$

5. §. Kettős és hármas integrálok néhány alkalmazása

1. Síkrész területe

a) Az (x, y) sík T tartományára kiterjesztett

$$\iint_T dx\, dy$$

kettős integrál a T síkrész területének a mérőszámával egyenlő.

b) Tegyük fel azt, hogy az

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

függvényrendszer az (x, y) sík T tartományát kölcsönösen megfordítható és egyértelmű módon képezi le az (u, v) sík T' tartományára $\left(\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| > 0 \right)$. Jelöljük a T tartomány mértékszámát T-vel, a T' tartományét pedig T'-vel:

$$T = \iint\limits_{T} dx\, dy; \quad T' = \iint\limits_{T'} du\, dv;$$

és nevezzük T-t alaptartománynak, T'-t pedig képtartománynak.

A változók transzformációjára vonatkozó tétel felhasználásával írhatjuk:

$$T = \iint\limits_{T} dx\, dy = \iint\limits_{T'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv.$$

Ha most képezzük az alaptartománynak a képtartományra vonatkoztatott lokális relatív értékváltozását, azaz a

$$\frac{dT}{dT'} = \lim_{\Delta T' \to 0} \frac{1}{\Delta T'} \iint\limits_{\Delta T'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

tartomány szerinti deriváltat, akkor magát az integrálandó függvényt, a

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Jacobi-féle determináns (függvénydetermináns) abszolút értékét kapjuk meg. Ez tehát a transzformáció kapcsán adódó területtorzulás lokális relatív értékét szolgáltatja. (Megjegyzés: hasonló eredmény adódik a térbeli transzformáció esetében is!)

2. Hengerszerű test térfogata

Az (x, y) sík T tartományára kiterjesztett

$$\iint\limits_{T} f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrál annak a hengerszerű testnek az előjeles térfogatát adja, melyet az (x, y) sík T síkrésze, e síkrész határgörbéjére állított, z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerpalást és a $z = f(x, y)$ felület határol.

3. Térrész térfogata

Az $f(x, y, z) \equiv 1$ függvénynek a tér valamely V zárt tartományára kiterjesztett hármas integrálja:

$$\iiint\limits_{V} dx\, dy\, dz$$

a V térrész térfogatával egyenlő.

4. Tömegközéppont (súlypont) meghatározása

A mérhető T tartományt $\varrho(P)$ sűrűséggel (fajsúllyal) betöltő tömegeloszlás tömegközéppontjának (súlypontjának) koordinátái:

$$x_s = \frac{\int\limits_T x\,\varrho(P)\,dT}{\int\limits_T \varrho(P)\,dT}; \quad y_s = \frac{\int\limits_T y\,\varrho(P)\,dT}{\int\limits_T \varrho(P)\,dT}; \quad z_s = \frac{\int\limits_T z\,\varrho(P)\,dT}{\int\limits_T \varrho(P)\,dT}.$$

E törtek nevezőiben szereplő

$$\int\limits_T \varrho(P)\,dT$$

tartományintegrál adja az egész rendszer tömegét (súlyát).

A törtek számlálóiban szereplő tartományintegrálok a tömegrendszernek elsőrendű (vagy statikai) nyomatékai.

5. Tehetetlenségi (másodrendű) nyomatékok

a) A P_i pontban fekvő m_i tömegpontnak, a tőle r_i távolságra fekvő tengelyre (vagy pontra) vonatkozó tehetetlenségi (másodrendű) nyomatéka:

$$m_i\,r_i^2.$$

Ennek alapján a mérhető T tartományt $\varrho(P)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás esetén a tehetetlenségi nyomaték:

$$\int\limits_T \varrho(P)\cdot r^2(P)\,dT.$$

b) Síkbeli, $\varrho = \varrho(x, y)$ sűrűségű tömegeloszlás esetén, ha az (x, y) koordinátarendszert a tömegeloszlás síkjában választjuk, akkor az egyes koordináta-tengelyekre vonatkozó ún. *axiális másodrendű nyomatékok:*

$$I_x = \iint\limits_T \varrho\,y^2\,dx\,dy,$$

$$I_y = \iint\limits_T \varrho\,x^2\,dx\,dy.$$

Az origóra vonatkozó ún. *poláris másodrendű nyomaték:*

$$I_p = \iint\limits_T \varrho(x^2 + y^2)\,dx\,dy = I_x + I_y.$$

Az x, y tengelyekre vonatkozó ún. *centrifugális másodrendű nyomaték:*

$$I_c = \iint\limits_T \varrho\,xy\,dx\,dy.$$

Ha ismeretes a tömegközépponton (súlyponton) átmenő, valamilyen irányú tengelyre vonatkozó I_s axiális másodrendű nyomaték, akkor a *Steiner-tétel* szerint egy, ettől a

tengelytől d távolságra fekvő és vele párhuzamos másik tengelyre vonatkozó axiális másodrendű nyomaték:

$$I = I_s + M\,d^2,$$

ahol M az egész rendszer tömegét jelenti.

Ha ismeretes a tömegközépponton átmenő, tengelykeresztre vonatkozó I_{sc} centrifugális másodrendű nyomaték, akkor egy másik, az előbbivel párhuzamos tengelykeresztre vonatkozó centrifugális másodrendű nyomaték:

$$I_c = I_{sc} + M\,x_s\,y_s,$$

ahol M az egész rendszer tömegét, x_s és y_s pedig a tömegközéppontnak a szóban forgó új tengelyekre vonatkoztatott koordinátáit jelentik.

c) Térbeli, ϱ sűrűségű tömegeloszlás esetén az egyes koordináta-tengelyekre vonatkozó *axiális tehetetlenségi nyomatékok:*

$$I_{xx} = \iiint_V \varrho(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yy} = \iiint_V \varrho(x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zz} = \iiint_V \varrho(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Az ún. *deviációs nyomatékok:*

$$I_{xy} = \iiint_V \varrho\,x\,y\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V \varrho\,y\,z\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{xz} = \iiint_V \varrho\,x\,z\,dx\,dy\,dz.$$

Az origóra vonatkozó *poláris tehetetlenségi nyomaték:*

$$I_p = \iiint_V \varrho(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}).$$

Térbeli tömegeloszlás tetszés szerinti tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai és az ezekkel párhuzamos, tömegközépponton átmenő tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai között is érvényes, a síkbeli tömegeloszlásnál említett, *Steiner-tétel* szerinti összefüggés.

Az

$$I_{xx}\,x^2 + I_{yy}\,y^2 + I_{zz}\,z^2 - 2(I_{xy}\,x\,y + I_{yz}\,y\,z + I_{xz}\,x\,z) = 1$$

egyenletű másodrendű felület (az egyes együtthatók a fentebb értelmezett axiális és deviációs nyomatékok) az ún. *tehetetlenségi ellipszoid.* Ennek az ellipszoidnak a főtengelyei az ún. fő tehetetlenségi irányokba mutatnak, középpontja pedig a koordináta-

rendszer kezdőpontja. Ha a koordináta-rendszert a kezdőpont körül úgy forgatjuk el, hogy a koordináta-tengelyek az ellipszoid főtengelyeivel egybeessenek, akkor ebben a koordináta-rendszerben az ellipszoid egyenlete nem fog tartalmazni vegyes másodfokú tagokat. Vagyis ezekre a tengelyekre vonatkozólag a rendszer deviációs nyomatékai zérusok. A fő tehetetlenségi irányokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok, az ún. *fő tehetetlenségi nyomatékok*, szélső értékek.

Ha a koordináta-rendszer kezdőpontján át húzunk egy g egyenest, és megkeressük ennek az egyenesnek a tehetetlenségi ellipszoiddal való egyik M metszéspontját, akkor az $\overline{OM}$ távolság megadja a g-re mint tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték reciprokának a négyzetgyökét.

6. Tömegeloszlás potenciálja

A $P_i(x_i, y_i, z_i)$ pontban fekvő m_i tömegpont *(Newton-féle) potenciáljának* értéke, a tőle r_i távolságra levő $R(\xi, \eta, \zeta)$ pontban:

$$\Phi_i = \frac{m_i}{r_i};$$

az $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ pontrendszeré:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}.$$

Ennek alapján, a T tartományt $\varrho(P)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás (Newton-féle) potenciálja az R pontban:

$$\Phi = \int_T \frac{\varrho(P)}{r}\, dT.$$

Térben pl.:

$$\Phi = \iiint_V \frac{\varrho(x, y, z)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

XI. SÍKGÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

1. §. Érintő, normális, ívhossz

1. Síkgörbe előállítása derékszögű koordináta-rendszerben

Explicit alak:

$$y = f(x);\; dy = f'(x)\,dx.$$

Implicit alak:

$$F(x, y) = 0;\; F'_x\,dx + F'_y\,dy = 0.$$

Paraméteres alak:

$$x = x(t),\; y = y(t);\; dx = \dot{x}(t)\;dt,\; dy = \dot{y}(t)\;dt.$$

Ha $f(x)$ folytonos, akkor a görbe is *folytonos*; ha $f(x)$ folytonosan differenciálható, akkor a *görbe íve sima.*

Ha a görbén meghatározunk egy befutási irányt (ez lehet pl. a független változó növekvő értékeinek megfelelő), akkor a görbét *irányítottnak* nevezzük.

2. Érintő és normális

A görbe (x, y) kordinátájú pontjában az *érintő és normális egyenes egyenlete:*

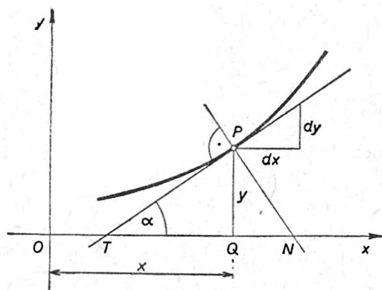
$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \text{illetve} \quad \eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x).$$

(ξ és η a futópont koordinátái.)

3. Ívhossz és ívelem

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)}\;dx = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\;dt.$$

$$s = \int_A^X ds = \int_a^\xi \sqrt{1 + f'^2(x)}\;dx = \int_\tau^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\;dt.$$



25. ábra

4. Tangens, normális szubtangens, szubnormális (25. ábra)

$$dx = ds\cos\alpha, \qquad dy = ds\sin\alpha.$$

Tangens:

$$\overline{PT} = \frac{y}{\sin\alpha} = y\frac{ds}{dy} =$$

$$= \frac{y}{f'}\sqrt{1 + f'^2} = \frac{y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\dot{y}}.$$

Normális:

$$\overline{PN} = \frac{y}{\cos\alpha} = y\frac{ds}{dx} = y\sqrt{1+f'^2} = \frac{y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\dot{x}}.$$

Szubtangens:

$$\overline{QT} = y \operatorname{ctg}\alpha = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f'} = \frac{y\,\dot{x}}{\dot{y}}.$$

Szubnormális:

$$\overline{QN} = y \operatorname{tg}\alpha = y\frac{dy}{dx} = y f' = \frac{y\,\dot{y}}{\dot{x}}.$$

5. Néhány fontosabb görbe

a) *Közönséges ciklois.* Egy b sugarú kör lapjának egyik, a középpontjából c távolságra fekvő pontja a körnek egy egyenesen való csúszásmentes gördülésekor leír egy közönséges cikloist:

$$x = b\,t - c\sin t, \quad y = b - c\cos t.$$

b) *Epiciklois.* Létrejön akkor, ha egy b sugarú kört csúszásmentesen végiggördítünk egy álló a sugarú kör külső peremén:

$$x = (a+b)\cos\frac{b}{a}t - c\cos\frac{a+b}{a}t,$$

$$y = (a+b)\sin\frac{b}{a}t - c\sin\frac{a+b}{a}t.$$

c jelenti a görbét leíró pontnak a gördülő kör középpontjától való távolságát.

c) *Hipociklois.* Létrejön akkor, ha a gördülő kör belülről érinti az álló kört:

$$x = (a-b)\cos\frac{b}{a}t + c\cos\frac{a-b}{a}t,$$

$$y = (a-b)\sin\frac{b}{a}t - c\sin\frac{a-b}{a}t.$$

$c = b$ esetén a ciklois *csúcsos*;

$c < b$ esetén *nyújtott*;

$c > b$ esetén pedig *hurkolt*.

d) $b = \frac{a}{2}$ esetén a hipociklois egy $\frac{a}{2} + c$, $\frac{a}{2} - c$ féltengelyhosszakkal bíró *ellipszis*.

e) $b = \frac{a}{4}$ esetén a hipociklois egy *asztrois* lesz:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

f) $a = b = c$ esetén az epiciklois egy ún. *szívgörbe (kardioid)*:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t) \\ y &= a(2\sin t - \sin 2t) \end{aligned}\right\} \quad (x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2\,[(x-a)^2 + y^2].$$

g) $b = c \to \infty$ esetén az epiciklois átmegy *körevolvensbe:*

$$x = a(\cos\tau + \tau\sin\tau), \quad y = a(\sin\tau - \tau\cos\tau).$$

h) *Láncgörbe:* $y = h \operatorname{ch} \frac{x}{h}$.

2. §. Két görbe metsződése és érintkezése

1. Metszési szög | Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$, illetve $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ egyenletű görbék ω *metszési szögének tangense:*

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x)\,g'(x)} = \frac{F'_x G'_y - F'_y G'_x}{F'_x G'_x + F'_y G'_y}.$$

Ez a képlet érvényes az $F(x, y) = c_1$, $G(x, y) = c_2$ görbeseregek egyes görbéinek metszési szögére is. A két görbesereg egyes görbéi egymást derékszög alatt metszik *(ortogonális görbeseregek)*, ha

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

A két görbesereg egybeesik, ha

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} = 0.$$

2. n-ed rendű érintkezés | Az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ görbék az x helyen *n-ed rendűen érintkeznek,* ha ott

$$f(x) = g(x)$$

és

$$f^{(k)}(x) = g^{(k)}(x), \quad \text{ha } k = 1, 2, \ldots, n,$$

de

$$f^{(n+1)}(x) \neq g^{(n+1)}(x).$$

3. §. Görbület, görbületi kör (simulókör)

1. Görbület | Egy görbe *görbületét* definíció szerint a görbe érintőirányszögének az ívhosszhoz viszonyított lokális relatív értékváltozása adja:

$$g = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x}{(F'^2_x + F'^2_y)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Görbületi sugár | $$\varrho = \left|\frac{1}{g}\right| = \left|\frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}\right| = \left|\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\right|.$$

3. Görbületi középpont (simulókör középpontja)

$$\xi = x - f' \frac{1 + f'^2}{f''} = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}},$$

$$\eta = y + \frac{1 + f'^2}{f''} = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}.$$

A simulókör másodrendűen érintkezik az adott görbével.

4. Evoluta, evolvens

A folytonos görbületű L görbe görbületi középpontjainak L' mértani helyét az L görbe *evolutájának*, míg magát az L görbét az L' evoluta *evolvensének* nevezzük.

a) Az *evoluta* egyes pontjait a következő egyenletrendszer határozza meg:

$$\xi = x - \varrho \sin \alpha = x - \frac{dy}{d\alpha} = x - f' \frac{1 + f'^2}{f''} = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}},$$

$$\eta = y + \varrho \cos \alpha = y + \frac{dx}{d\alpha} = y + \frac{1 + f'^2}{f''} = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}.$$

b) A $\xi = \xi(\sigma)$, $\eta = \eta(\sigma)$ egyenletrendszerrel megadott görbe (itt σ ennek az ívhosszát jelenti) *evolvense:*

$$x = \xi - (\sigma - \sigma_0) \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad y = \eta - (\sigma - \sigma_0) \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

4. §. Polárkoordináták

1. Polár-koordináták

r = *rádiuszvektor*, a pólustól mért távolság;
φ = *polárszög*, a rádiuszvektor és a polártengely által bezárt szög.

Ha a pólus egybeesik az (x, y) koordináta-rendszer kezdőpontjával és a polártengely az x tengellyel, akkor:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arc\cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \arc\sin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arc\operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

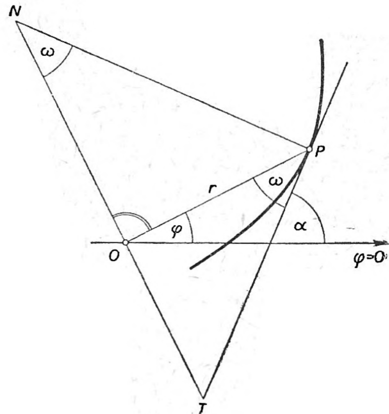
2. Ívelem, érintő

a) Az $r = r(\varphi)$ függvénnyel megadott görbe *íveleme:*

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \, d\varphi^2}.$$

b) A görbe *érintője és a rádiuszvektor által bezárt ω szög* (26. ábra) tangense:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$



26. ábra

c) Az érintő iránytangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \omega \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

3. Polártangens, polárnormális, polár-szubtangens, polárszub-normális

Polártangens: $\overline{PT} = r \frac{ds}{dr} = \frac{r}{\cos \omega}$.

Polárnormális: $\overline{PN} = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{\sin \omega}$.

Polárszubtangens: $\overline{TO} = r^2 \frac{d\varphi}{dr} = r \operatorname{tg} \omega$.

Polárszubnormális: $\overline{NO} = \frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{ctg} \omega$.

4. Szektorterület

$$T = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi.$$

5. Görbület

$$g = \frac{r^2 + 2r' - r\, r''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

6. Néhány fontosabb görbe egyenlete polár-koordinátákkal

Archimedesi spirális: $r = a\varphi$.

Hiperbolikus spirális: $r = \frac{a}{\varphi}$.

Logaritmikus spirális: $r = e^{a\varphi}$.

Lemmiszkáta: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Kardioid: $r = 2a(1 + \cos \varphi)$; $(x^2 + y^2 - 2a\,x)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

Cisszois: $r = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$; $y^2(a - x) = x^3$.

Konchois: $r = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a$; $(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2$.

Sztrofois: $r = \frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$; $(a + x)\,y^2 = (a - x)\,x^2$.

Descartes-féle levél: $r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$; $x^3 + y^3 = 3a\,xy$.

5. §. Aszimptoták

1. Derékszögű koordinátákban

Az *aszimptota egyenlete:*

$x = a$, ha $y \to \pm\infty$ mellett $x \to a$;

$y = b$, ha $x \to \pm\infty$ mellett $y \to b$;

$$y = m\,x + b, \text{ ha } m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (y - m\,x).$$

2. Polár-koordinátákban

a) Ha az $r = r(\varphi)$ egyenletű görbe esetén $r \to \infty$ mellett $\varphi \to \alpha$, akkor α az *aszimptota iránya*. Az *aszimptota távolsága a pólustól:*

$$p = \lim_{\varphi \to \alpha} r \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

b) Az $r = a$ egyenletű kör aszimptotája az $r = r(\varphi)$ egyenletű görbének, ha $\lim\limits_{\varphi \to \infty} r = a$.

6. §. Síkgörbék szinguláris pontjai

Definíció

Ha az $x = x_0$, $y = y_0$ helyen a síkgörbe $f(x, y) = 0$ egyenletében szereplő $f(x, y)$ függvényre fennáll, hogy

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

továbbá [feltételezve azt, hogy $f(x, y)$-nak a vizsgált hely környezetében folytonos másodrendű parciális deriváltjai vannak, és ezek nem mindegyike zérus],

a) $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$, akkor a görbének itt *csomópontja* van;

b) $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$, akkor a görbének itt *izolált pontja* van.

7. §. Görbesereg burkolója

Meghatározás

Az

$$f(x, y, c) = 0$$

egyenletben szereplő c paraméter minden értékéhez tartozik egy görbe. Az egyenlet tehát egy *(egyparaméteres) görbesereget* határoz meg.

A görbesereg *burkoló görbéjének* egyenletét az

$$f(x, y, c) = 0, \quad f'_c(x, y, c) = 0$$

egyenletrendszerből kapjuk a c paraméter kiküszöbölésével.

XII. KOMPLEX SZÁMOK, KOMPLEX VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

1. §. Komplex számok értelmezése, ábrázolása és aritmetikája

1. Komplex számok értelmezése

a) *Komplex számon* értjük egy valós és egy tiszta képzetes szám összegét. *Tiszta képzetes (imaginárius)* szám a képzetes egység többszöröse. A *képzetes egység:*

$$i = +\sqrt{-1}.$$

Tehát ha x és y tetszőleges valós számok, akkor

$$z = x + iy$$

komplex szám. Ez az írásmód a komplex számot *algebrai alakjában* adja elénk. z-nek ún. *valós része: x; képzetes része: y.* Jelekben:

$$\mathrm{Re}(z) = x; \quad \mathrm{Im}(z) = y.$$

b) A $z = x + iy$ és $z = x - iy$ komplex számok egymásnak *konjugáltjai*.

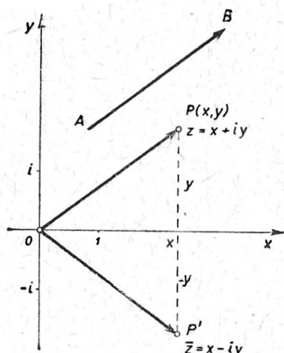
2. Komplex számok ábrázolása

b) Minden $z = x + iy$ komplex szám ábrázolható (27. ábra):

α) vagy egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben a $P(x, y)$ ponttal;

β) vagy a koordináta-rendszer kezdőpontjából e ponthoz vont $\overrightarrow{OP}$ síkbeli vektorral;

γ) vagy e sík minden $\overrightarrow{OP}$-vel egyenlő hosszúságú és irányú $\overrightarrow{AB}$ vektorával.



27. ábra

b) Megállapodás szerint a vízszintes koordinátatengely x a *valós tengely* és a függőleges koordinátatengely y a *képzetes tengely*. Kezdőpont és egységpontok (1 és i) megválasztása után a sík minden pontjához egy komplex szám rendelhető hozzá, és megfordítva, minden komplex számhoz egy síkbeli pont. A komplex számokkal így benépesített síkot *Gauss-féle számsíknak* nevezzük.

c) Az ábrázolással kapcsolatban megjegyezzük, hogy két konjugált komplex szám képe egymásnak a valós tengelyre vonatkozó tükörképe (27. ábra).

d) Az ábrázolásból könnyen meggyőződhetünk arról, hogy két komplex szám akkor egyenlő egymással, ha mind a valós, mind a képzetes részeik egyenlők egymással.

e) Egy komplex szám akkor egyenlő zérussal:

$$z = x + i y = 0,$$

ha mind a valós, mind a képzetes része egyenlő zérussal, azaz

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Ennek a képe az origo.

3. Alapműveletek komplex szám algebrai alakjával

a) Komplex számokkal ugyanúgy számolunk, mint bármely algebrai mennyiséggel, az alábbi reláció figyelembevételével:

mivel $i = +\sqrt{-1}$, azért $i^2 = -1$.

b) *Néhány szabály:*

$$(a + i b) \pm (c + i d) = (a \pm c) + i(b \pm d).$$

$$(a + i b) \cdot (c + i d) = (a c - b d) + i(a d + b c).$$

$$\frac{a + i b}{c + i d} = \frac{a c + b d}{c^2 + d^2} + i \frac{b c - a d}{c^2 + d^2}, \quad \text{hacsak } c^2 + d^2 \neq 0.$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \text{hacsak } a^2 + b^2 \neq 0.$$

c) *Komplex szám abszolút értéke:*

Mivel

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (x + i y)(x - i y) = x^2 + y^2,$$

azért

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}} = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

d) *A képzetes egység hatványai:*

$$\begin{array}{llll} i^1 = i, & i^5 = i, & & i^{4k+1} = i, \\ i^2 = -1, & i^6 = -1, & \dots & i^{4k+2} = -1, \\ i^3 = -i, & i^7 = -i, & & i^{4k+3} = -i, \\ i^4 = 1, & i^8 = 1, & & i^{4k} = 1, \end{array}$$

ahol $k \geqq 0$ és egész szám.

4. Komplex szám trigometrikus alakja

Mivel (28. ábra)

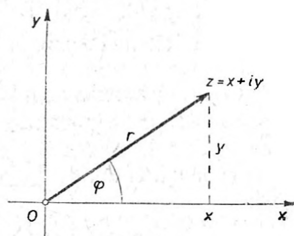
$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi,$$

azért

$$z = x + i y = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ez a *komplex szám trigometrikus (vagy polár-) alakja.* Ha ismerjük a komplex szám algebrai alakját, a trigo-



28. ábra

metrikus alakra a következő összefüggések alapján térhetünk át:

$$\textit{abszolút érték: } r = |z| = +\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\textit{arcus (ív): } \varphi = \operatorname{arc} z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \arccos\frac{x}{r} = \arcsin\frac{y}{r}.$$

Az arc z többértékűségére való tekintettel a következőket kell szem előtt tartani:

$$\text{ha } x \geqq 0 \text{ és } y \geqq 0, \text{ akkor } 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{ha } x \leqq 0 \text{ és } y \geqq 0, \text{ akkor } \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi,$$

$$\text{ha } x \leqq 0 \text{ és } y \leqq 0, \text{ akkor } \pi \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{2},$$

$$\text{ha } x \geqq 0 \text{ és } y \leqq 0, \text{ akkor } \frac{3\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

5. Műveletek trigometrikus alakú komplex számokkal

a) *Szorzás, osztás.* Ha

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad k = 1, 2,$$

akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

b) *Hatványozás (Moivre-képlet):*

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

c) *Gyökvonás:* ha

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)],$$

ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, továbbá $n > 0$ és egész, akkor

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right], \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Az n-edik gyök n értékű. $\sqrt[n]{z}$-nek az n különböző értéke az origo körül rajzolt $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön fekszik, a $\frac{\varphi}{n}$ arkusszal meghatározott első gyöktől egyenlő $\frac{2\pi}{n}$ ívnyi távolságra, azaz az n különböző gyököt egy az origo körül rajzolt $\sqrt[n]{r}$ sugarú körbe írt szabályos n szög csúcspontjai adják.

6. A reciprok érték szerkesztése. Inverzió

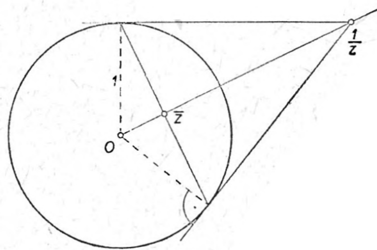
Mivel

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2},$$

azért egy zérustól különböző komplex szám reciprok értékének a képét a következő két lépésben szerkeszthetjük meg:

1. a z-ről $\bar{z}$-re áttérve, a z vektort a valós tengelyen tükrözzük;

2. megállapítjuk, hogy a $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ vektor iránya és értelme a $\bar{z}$-vel megegyezik, de abszolút értéke nyilván $|z|$ reciprok értéke: $\frac{1}{|z|}$. Az utóbbi szerkesztést az ún. egységkörre való tükrözést (inverziót) a következőképpen végezzük (29. ábra): Ha $\bar{z}$ az egységkörön belül van, akkor a $\bar{z}$ vektorra a végpontjában merőlegest emelünk, s az utóbbinak az egységkörrel való metszéspontjaiban a körhöz érintőket húzunk. Az érintők a $\bar{z}$ irányában és értelmében mutató félsugarat éppen az $\frac{1}{z}$ vektor végpontjában metszik. Ha $\bar{z}$ az egységkörön kívül van, akkor a szerkesztést fordított sorrendben végezzük.



29. ábra

2. §. Komplex változós függvények

1. Definíció

Legyen x és y két független valós változó, akkor $z = x + iy$ egy *komplex változó*. Ha valamilyen utasítás minden szóba jöhető és megengedett z-hez egy meghatározott

$$w = u + iv$$

komplex számot rendel hozzá, akkor azt mondjuk, hogy w a z komplex változó *egyértékű függvénye:*

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y).$$

2. Folytonosság

A $w = f(z)$ függvény *folytonos* a z_0 pontban, ha

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

A *határátmenet* értelmezése:

$$z = x + iy \to z_0 = x_0 + iy_0,$$

azaz

$$x \to x_0 \quad \text{és} \quad y \to y_0$$

egymástól függetlenül.

3. Differenciálhatóság

a) A

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

komplex változós függvény a z helyen *differenciálható,* ha létezik a következő határérték, *a határátmenet módjától függetlenül:*

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Ennek feltétele az, hogy w valós és képzetes részének folytonos elsőrendű parciális deriváltjai legyenek, és ezek kielégítsék a *Cauchy—Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ebben az esetben a $w = f(z)$ függvényt *reguláris* vagy *analitikus függvénynek* nevezzük.

A függvény deriváltja:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

b) Egy zárt tartományban differenciálható komplex változós függvény ott akárhányszor differenciálható.

4. Harmonikus függvények

a) Bármely reguláris komplex változós függvény valós és képzetes része kielégíti az ún. *Laplace-féle parciális differenciálegyenletet.*

Ha tehát $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ reguláris, akkor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Az olyan folytonos másodrendű parciális deriváltakkal rendelkező kétváltozós függvényt, amely a Laplace-féle parciális differenciálegyenletet kielégíti, *harmonikus függvénynek* nevezzük. Tehát a reguláris $f(z)$ függvény valós és képzetes része harmonikus függvény.

b) Az állítás megfordításaként adódik, hogy egy egyszeresen összefüggő* síkrészben az $u(x, y)$ harmonikus függvényhez mindig található oly $v(x, y)$ *„harmonikus társ"*, amellyel együtt képezett

$$u(x, y) + i\, v(x, y) = f(z)$$

komplex változós függvény reguláris. Az adott $u(x, y)$ harmonikus függvény harmonikus társát a kvadratúra-probléma megoldásához hasonlóan számíthatjuk, a reguláris komplex változós függvény esetén fennálló Cauchy—Riemann-féle parciális differenciálegyenletek figyelembevételével:

$$v(x, y) = \int\limits_L \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + c,$$

ahol az integrál az (x, y) sík szóban forgó, egyszeresen összefüggő részében futó tetszőleges L görbe mentén számítandó, egy rögzített z_0 ponttól a változó z pontig; c tetszőleges valós állandó.

* Egy tartományt *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha a kerülete egyetlenegy összefüggő ponthalmazból (görbéből vagy felületből, esetleg egyetlenegy pontból) áll. Ezzel szemben egy olyan tartomány, melynek a kerülete 2, 3, . . ., n, páronként egymástól különálló, de önmagában összefüggő ponthalmazból (görbéből vagy felületből, esetleg pontból) áll, *két-, három-, . . ., n-szeresen összefüggő.*

3. §. Az elemi komplex változós függvények

1. Exponenciális függvény. Euler-féle reláció

a) *Euler-féle reláció:*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

b) *Exponenciális függvény:*

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

$$|w| = e^x; \quad \operatorname{arc} w = y.$$

c) Az exponenciális függvény komplexben *periodikus*, a periódusa $2\pi i$:

$$e^z = e^{z+2k\pi i}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

d) $e^{2k\pi i} = 1$. $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ az ún. n-edik egységgyökök.

e) *Komplex szám exponenciális alakja.* Mivel az Euler-féle reláció alapján:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

azért

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r\, e^{i\varphi}.$$

Ez a komplex szám exponenciális alakja.

2. Logaritmusfüggvény

a) $w = \ln z$ az exponenciális függvény inverze:

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{arc} z + 2k\pi i, \quad \text{ahol} \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

A logaritmusfüggvény *végtelen sok értékű.* A *főérték:*

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{arc} z.$$

b) *Néhány összefüggés:*

$\ln e^z = z + 2k\pi i$, $e^{\ln z} = z$.

$\ln (z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$.

$\ln 1 = 2k\pi i$; $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

$\ln i = i\left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|$; $\operatorname{Ln} i = i\frac{\pi}{2}$.

$\ln (-1) = (2k + 1)\pi i$; $\operatorname{Ln} (-1) = \pi i$.

$\ln (-i) = i\left|\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right|$; $\operatorname{Ln} (-i) = i\frac{3\pi}{2}$.

3. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

$$\sin z = \frac{1}{i} \operatorname{sh} (i z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

$$\cos z = \operatorname{ch} (i z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \operatorname{th} (i z) = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{\sin x \cos x + i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}.$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} (i z) = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{\sin x \cos x - i \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z;\ \cos(z + 2k\pi) = \cos z;\ \operatorname{tg}(z + k\pi) = \operatorname{tg} z;$$

$$\operatorname{ctg}(z + k\pi) = \operatorname{ctg} z;\quad \text{ahol}\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Ha x valós, akkor

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{i}\sin(i\,x);\ \operatorname{ch} x = \cos(i\,x);\ \operatorname{th} x = \frac{1}{i}\operatorname{tg}(i\,x);\ \operatorname{cth} x = i\operatorname{ctg}(i\,x).$$

4. Arkusz- és area-függvények

$$\operatorname{arc\,sin} z = \frac{1}{i}\operatorname{ar\,sh}(i\,z) = \frac{1}{i}\ln\left(i\,z \pm \sqrt{1 - z^2}\right).$$

$$\operatorname{arc\,cos} z = \frac{1}{i}\operatorname{ar\,ch} z = \frac{1}{i}\ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{i}\operatorname{ar\,th}(i\,z) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1 + i\,z}{1 - i\,z}.$$

$$\operatorname{arc\,ctg} z = i\operatorname{ar\,cth}(i\,z) = \frac{i}{2}\ln\frac{i\,z + 1}{i\,z - 1}.$$

$$\operatorname{arc\,sin} z + \operatorname{arc\,cos} z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\quad \operatorname{arc\,tg} z + \operatorname{arc\,ctg} z = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\text{ahol}\ k = 0,\ \pm 1,\ +2, \ldots$$

Ha x valós, akkor

$$\operatorname{ar\,sh} x = \frac{1}{i}\operatorname{Arc\,sin}(i\,x).$$

$$\operatorname{ar\,ch} x = \pm\frac{1}{i}\operatorname{Arc\,cos} x,\quad x \geqq 1.$$

$$\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{i}\operatorname{Arc\,tg}(i\,x),\quad |x| < 1.$$

$$\operatorname{ar\,cth} x = i\operatorname{Arc\,ctg}(i\,x),\quad |x| > 1.$$

4. §. Konform leképezés

1. Leképezés

Legyen

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

egy analitikus komplex változós függvény. Az (x, y) síkban fekvő,

$$u(x, y) = \text{állandó},\quad v(x, y) = \text{állandó}$$

egyenletekkel meghatározott görbeseregek egy ortogonális görbehálózatot képeznek, feltéve, hogy $f'(z) \neq 0$.

Ha z-vel jelöljük az (x, y) sík pontjait, w-vel az (u, v) sík pontjait, akkor a $w = f(z)$ függvénykapcsolat a z pontoknak a w pontokra való leképezését értelmezi.

2. Konform leképezés

Ha $w = f(z)$ analitikus és $f'(z) \neq 0$, akkor az általa létrehozott leképezés konform, azaz *szögtartó*, és *kicsinyben aránytartó*.

5. §. Komplex sorok

1. Konvergencia

Az általános $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ komplex tagú

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

sor konvergens, ha a valós

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots \quad \text{és} \quad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \ldots$$

sorok konvergensek. Ha e valós sorok összege α, illetve β, akkor a szóban forgó komplex sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha + i\beta.$$

2. Abszolút konvergencia

Egy komplex tagú sor abszolút konvergens, ha a tagok abszolút értékeiből alkotott sor konvergens.

3. Hatványsorok

Minden a $z = z_0$ pont környezetében analitikus $w = f(z)$ komplex változós függvény egy, a $z - z_0$ hatványai szerint haladó hatványsorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Ez a sor konvergens a z_0 körül rajzolt azon kör belsejében, melynek minden pontjában $f(z)$ reguláris.

6. §. Integrálás a komplex számsíkon

1. Görbe menti integrál

Legyen $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ folytonos, és a t valós paramétertől függő

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

függvénnyel megadott L görbe rektifikálható. Akkor az $f(z)$ függvénynek az *L görbe mentén vett integrálja:*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy) = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]\,\frac{dz}{dt}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \{u[x(t), y(t)]\,\dot{x}(t) - v[x(t), y(t)]\,\dot{y}(t)\}\,dt +$$

$$+ i\int_{t_1}^{t_2} \{v[x(t), y(t)]\,\dot{x}(t) + u[x(t), y(t)]\,\dot{y}(t)\,dt.$$

2. Határozatlan integrál

Egy tartományban egyértékű és reguláris $f(z)$ függvény egyértékű *primitív függvényéről* akkor beszélhetünk, ha e tartomány egy rögzített a pontját bármely z pontjával összekötő L görbe mentén vett

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)\, d\zeta$$

integrál a z felső határnak az úttól független egyértékű függvénye.

Fennáll, hogy

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z).$$

7. §. A komplex változós függvénytan fő tételei

1. Az alaptétel

a) Egy egyszeresen összefüggő korlátos tartományban egyértékű és reguláris $f(z)$ függvénynek minden e tartomány belsejébe eső, zárt, szakaszonként sima L görbe mentén vett integrálja zérus:

$$\oint f(z)\, dz = 0.$$

b) Ez esetben $f(z)$ integrálja pusztán az integrálási út kezdő- és végpontjától függ.

2. Cauchy integrálképlete

a) Ha $f(z)$ egy a pont körül pozitív irányban írt K körön és ennek belsejében reguláris, akkor e kör bármely belső z pontjában:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Megjegyezzük, hogy K helyett bármely ezen belül futó, a z pontot egyszer pozitív irányban körülfogó, egyszerű szakaszonként sima és zárt L görbét választhatunk.

b) Többszörösen összefüggő tartománynál, pl. a K_1 és K_2 körök által határolt körgyűrű-tartománynál Cauchy integrálképlete csak annyiban módosul, hogy az integrált mind a két kerületre ki kell terjeszteni, mégpedig úgy, hogy bejárásuknál bal kezünk a regularitási tartomány belsejébe essék:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

3. A Cauchy—Taylor-féle és a Laurent-féle sor

a) Legyen $f(z)$ az a pont körül írt K kör belsejében legfeljebb az a pont kivételével egyértékű és reguláris függvény. Aszerint, amint $f(z)$ az a pontban is reguláris, illetve nem, az a pontot az $f(z)$ függvény *reguláris,* illetve *izolált, elszigetelt szinguláris pontjának* nevezik.

b) Ha az a pont maga is reguláris pont, akkor *Cauchy* szerint

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots$$

a K körön belül fekvő minden z pontban;

ha azonban az a pont elszigetelt szinguláris pont, akkor *Laurent* szerint

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

a K körön belül fekvő minden a-tól különböző z pontban.

Mind a két esetben:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

ahol L egy, a K körön belül futó és az a pontot egyszer pozitív irányban körülfonó kör (vagy szakaszonként sima, egyszerű zárt görbe).

c) Ha $f(z)$ a K kör belsejében reguláris (a-ban is), akkor $f(z)$ a $(z-a)$ pozitív hatványai szerint haladó közönséges hatványsorba fejthető. De akkor ez a hatványsor, tehát maga az $f(z)$ is a K kör belsejében akárhányszor differenciálható, és a hatványsor csak a függvény *Taylor-sora* lehet. Így

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

d) Egy tartományban reguláris függvény ott akárhányszor deriválható.

e) Ha egy tartományban egyértékű, folytonos $f(z)$ függvénynek e tartományban futó bármely zárt görbe mentén vett integrálja zérus, akkor $f(z)$ itt reguláris.

4. Reguláris és szinguláris pontok osztályozása

a) Egy $z = a$ reguláris helyen

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

Ha $f(a) = 0$, akkor $z = a$ az $f(z)$ függvénynek egyik zérushelye, az $f(z) = 0$ egyenletnek egyik gyöke. Mégpedig, ha

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

akkor $z = a$ n-szeres zérushely, illetve n-szeres gyök.

b) Az elszigetelt szinguláris pontokat a környezetükben érvényes Laurent-sor „legalacsonyabb" fokú tagja szerint osztályozzuk. Aszerint, amint ez a $(z-a)$ n-edik hatványát tartalmazza, és

$$n \geqq 0, \qquad < 0, \qquad -\infty,$$

zóval a $(z-a)$ negatív hatványait tartalmazó

$$\ldots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-a}$$

ún. kritikus vagy főrész

hiányzik, véges számú, végtelen sok

tagból áll: a szinguláris pont

megszüntethető, *pólus*, *lényeges*.

5. A ∞ pont

Egy $f(z)$ függvény ∞-beli magatartását a $z = \frac{1}{\zeta}$ bevezetésével előálló $f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F(\zeta)$ függvény $\zeta = 0$ pontbeli magatartásától tesszük függővé. Ha itt $F(\zeta)$ reguláris, akkor $f(z)$ a végtelenben reguláris, ha pedig $F(\zeta)$-nak a kezdőpont elszigetelt szinguláris pontja, akkor $f(z)$-nek a végtelen ugyancsak elszigetelt, mégpedig ugyanolyan jellegű szinguláris pontja.

6. Az algebra alaptétele

a) Minden $n \geqq 1$ fokszámú

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0, \quad a_n \neq 0$$

algebrai egyenletnek van gyöke.

b) A

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, \; n \geqq 1$$

polinom mindig

$$p_n(z) = a_n(z - a)^\alpha (z - b)^\beta \ldots (z - l)^\lambda$$

alakba írható, ahol $a, b, \ldots, l$ különböző komplex, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ pedig nem negatív egész számok, és

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n.$$

Ez a felbontás adja a polinom ún. *gyöktényezős alakját.*

c) Egy n-ed fokú polinomnak, illetve algebrai egyenletnek pontosan n zérushelye, illetve gyöke van, ha minden zérushelyet, illetve gyököt többszörösségének (multiplicitásának) megfelelően veszünk számba.

XIII. VEKTORALGEBRA. DETERMINÁNSOK, LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

1. §. Vektoralgebra

1. Alapfogalmak

a) Azokat a mennyiségeket, amelyek egyértelmű jellemzésére elegendő egyetlen számadat, *skalároknak* nevezzük. Ezzel szemben azokat a mennyiségeket, melyeknek egyértelmű jellemzésére nem elégséges a nagyságukat kifejező egyetlen számadat, hanem irányuk és irányításuk is van, *vektoroknak* nevezzük.

Vektoron értjük a tér két tetszőleges pontját, pl. a P és Q pontot meghatározott sorrendben összekötő, tehát irányított egyenesdarabot:

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}.$$

b) A vektort ábrázoló egyenesszakasz hosszát a vektor *abszolút értékének* vagy a vektor nagyságának nevezzük:

$$|\boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{PQ}| = v.$$

A vektort abszolút értékén kívül jellemzi az *iránya* és *irányítása* (vagy *irányításának értelme*).

c) Két vektort *egyenlő nagyságúnak* mondunk, ha abszolút értékük, azaz a kezdő- és végpontjuk közötti távolság egyenlő: $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

d) Két vektor *egyenlő irányú,* ha az őket ábrázoló egyenesszakaszok párhuzamosak: $\boldsymbol{a} \,||\, \boldsymbol{b}$.

e) Két vektor *egyenlő irányítású,* ha az őket ábrázoló egyenesszakaszok párhuzamosak, és nyilaik is egy irányba mutatnak: $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$.

f) Két vektor lehet egyenlő irányú, de ellenkező irányítású (vagy értelmű): $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

g) Két vektort ($\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$) *egyenlőnek* mondunk ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$), ha azok párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók, tehát ha nagyságuk, irányuk és irányításuk egyenlő. A vektorok egyenlősége szempontjából tehát közömbös a vektor kezdőpontjának a térben elfoglalt helyzete. Egy vektor tehát önmagával párhuzamosan eltolható a térben anélkül, hogy ezáltal megváltoznék. (Az ilyen tulajdonsággal rendelkező vektorokat szokás *szabad vektoroknak* nevezni, megkülönböztetésül az ún. *kötött vektoroktól,* amelyeknek rögzített kezdőpontjuk van.)

h) Azt az elfajuló vektort, amelynek kezdő- és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* nevezzük. Jele: $\boldsymbol{0}$ vagy röviden 0.

i) *Egységvektor* az a vektor, amelynek abszolút értéke 1. Az $\boldsymbol{a}$ vektor egységvektora az az egységnyi abszolút értékű vektor, amelynek iránya és irányítása megegyezik az $\boldsymbol{a}$ vektoréval. Jele: a°.

j) *Kollineárisak* azok a vektorok, amelyek ugyanazzal az egyenessel párhuzamosak; *komplanárisak* azok a vektorok, amelyek ugyanazzal a síkkal párhuzamosak.

k) A tér egyes pontjainak helyzetét egyértelműen meghatározzák azok a rögzített kezdőpontú, kötött vektorok, melyek a tér egy kiválasztott pontjából (O kezdőpont, origo) a tér egyes pontjaiba mutatnak. Ezeket a vektorokat nevezzük *helyvektoroknak* (rádiuszvektoroknak). A P pont helyvektora: $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$.

l) A *nagyobb,* illetve *kisebb* ($\gtrless$) vonatkozásnak vektorok között nincsen értelme.

m) Önmagában nincs értelme a vektorok között az *előjelnek* sem. A negatív előjelet csak az irányítás viszonylagosságának a jelzésére használjuk: a $-\boldsymbol{v}$ vektor olyan vektor, melynek abszolút értéke a $\boldsymbol{v}$ vektoréval megegyezik, $\boldsymbol{v}$-vel egy irányú (párhuzamos), de ellenkező irányítású (értelmű):

$$|-\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|; \quad -\boldsymbol{v} \uparrow\downarrow \boldsymbol{v}.$$

2. Vektorok összeadása és kivonása

a) *Két vektor összegét* úgy határozzuk meg, hogy az egyik összeadandó vektor végpontjához illesztjük a másik kezdőpontját, majd az első összeadandó kezdőpontját a második végpontjával — ebben a sorrendben — összekötjük. Az összeadandók az *összetevők (komponensek)*, az összegvektor az *eredő (rezultáns)*.

b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ *(kommutativitás).*

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ *(asszociativitás).*

c) Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ *különbségét* úgy definiáljuk, mint az $\boldsymbol{a}$ és $-\boldsymbol{b}$ vektorok összegét:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorokat egy közös pontból felrajzolva, a különbségvektort az a vektor adja, mely a kivonandó vektor végpontjából a kisebbítendő vektor végpontjába mutat.

d) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = 0.$

3. Vektor szorzása számmal (skalárral)

a) Legyen m tetszőleges (valós) szám (skalár), akkor az $\boldsymbol{a}$ vektornak m-mel való szorzata:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}m = \boldsymbol{b}$$

olyan vektor, melynek abszolút értéke:

$$|\boldsymbol{b}| = |m||\boldsymbol{a}|;$$

iránya az $\boldsymbol{a}$ vektor irányával megegyező (párhuzamosak):

$$\boldsymbol{b} \,||\, \boldsymbol{a};$$

irányítása pedig az $\boldsymbol{a}$ vektoréval megegyező, ha $m > 0$; és ellenkező, ha $m < 0$:

$$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}, \quad \text{ha} \quad m > 0,$$

$$\boldsymbol{b} = m\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}, \quad \text{ha} \quad m < 0.$$

Ha speciálisan $m = 0$, akkor

$$m\,\boldsymbol{a} = 0.$$

b) $m(n\,\boldsymbol{a}) = (m\,n)\,\boldsymbol{a} = m\,n\,\boldsymbol{a}$ *(asszociativitás).*

$(m + n)\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{a} + n\,\boldsymbol{a}$ *(disztributivitás).*

$m(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = m\,\boldsymbol{a} + m\,\boldsymbol{b}$ *(disztributivitás).*

c) Ha $\boldsymbol{a} \neq 0$, akkor

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}^{\circ};$$

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

d) Két vektor *párhuzamosságának a feltétele* az, hogy az egyik vektor egyenlő legyen a másik vektor skalárszorosával:

$$\boldsymbol{b} = m\,\boldsymbol{a}.$$

(Itt feltesszük azt, hogy ha $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} \neq 0$, akkor $m \neq 0$.)

4. A vektorok lineáris függése, illetve függetlensége

a) Ha az $\boldsymbol{a}$ *és* $\boldsymbol{b}$ vektorok *kollineárisak*, akkor ezek egymástól lineárisan függenek, azaz

$$\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} = 0, \text{ ahol } |\alpha| + |\beta| > 0.$$

b) Két vektor, $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ lineárisan független, azaz *nem kollineáris*, ha

$$\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} = 0, \text{ ahol } |\alpha| + |\beta| = 0.$$

c) Az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok *komplanárisak*, ha egymástól lineárisan függenek, azaz

$$\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} + \gamma\,\boldsymbol{c} = 0, \text{ ahol } |\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0.$$

d) Ha az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok *nem komplanárisak*, akkor egymástól lineárisan függetlenek, azaz

$$\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} + \gamma\,\boldsymbol{c} = 0, \text{ ahol } |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 0.$$

e) Ha az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok nem komplanárisak, azaz lineárisan függetlenek, akkor a $\boldsymbol{d}\,(\neq 0)$ vektor mindig egyértelműen felbontható az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre, azaz

$$\boldsymbol{d} = \delta_1\,\boldsymbol{a} + \delta_2\,\boldsymbol{b} + \delta_3\,\boldsymbol{c},$$

ahol $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ a $\boldsymbol{d}$ vektornak az $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok által alkotott alaprendszerre vonatkozó *koordinátái*, és ezek egyidejűleg nem mind zérusok, azaz $|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| > 0$.

f) A térben háromnál több lineárisan független vektor nincsen, azaz négy vektor esetében az

$$\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} + \gamma\,\boldsymbol{c} + \delta\,\boldsymbol{d} = 0$$

összefüggésben található olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, hogy

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| > 0.$$

5. Két vektor skaláris szorzata

a) *Definíció:*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ *(kommutativitás).*

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ *(disztributivitás).*

c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ lehet akkor is, ha sem $\boldsymbol{a}$, sem $\boldsymbol{b}$ nem zérus, de a köztük levő szög $\frac{\pi}{2}$, vagyis *merőlegesek.*

Két vektor merőlegességének a feltétele, hogy skaláris szorzatuk zérus legyen.

6. A skaláris szorzat néhány alkalmazása

a) Legyen $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$, akkor mivel

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2,$$

az $\boldsymbol{a}$ *vektor abszolút értéke:*

$$|\boldsymbol{a}|=+\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=+\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$

b) Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ *vektor hajlásszögének a koszinusza:*

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\cdot\quad(\boldsymbol{a}\neq 0,\ \boldsymbol{b}\neq 0).$$

c) A $\boldsymbol{b}$-nek $\boldsymbol{a}$-ra vetett *derékszögű vetülete:*

$$p=\boldsymbol{a}^\circ\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

A $\boldsymbol{b}$-nek $\boldsymbol{a}$ *menti komponense:*

$$\boldsymbol{p}=p\,\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}.$$

$\boldsymbol{b}$-nek $\boldsymbol{a}$-*ra merőleges komponense:*

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}.$$

d) Egy $\boldsymbol{e}_i$ egységvektornak egy másik $\boldsymbol{e}_k$ egységvektorra vetett derékszögű vetülete, $\boldsymbol{e}_k$ menti koordinátája:

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k=\cos(\widehat{\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_k}).$$

Ez nem egyéb, mint a hajlásszög koszinusza, $\boldsymbol{e}_i$-nek $\boldsymbol{e}_k$-ra vagy $\boldsymbol{e}_k$-nak $\boldsymbol{e}_i$-re vonatkozó *iránykoszinusza.*

7. Két vektor vektoriális szorzata

a) Az $\boldsymbol{a}$ vektornak a $\boldsymbol{b}$ vektorral való *vektoriális szorzata:*

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\cdot\boldsymbol{s}^\circ,$$

ahol $\boldsymbol{s}^\circ$ egy, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok síkjára merőleges, azokkal $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{s}^\circ$ sorrendben jobb rendszert (jobb sodrású rendszert) képező egységvektor.

b) Az $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ vektor abszolút értéke az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok által kifeszített *paralelogramma területének* a mérőszámával egyenlő.

c) A vektoriális szorzás *alternáló művelet*, azaz

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

d) A vektoriális szorzat zérus lehet akkor is, ha egyik tényező sem zérus, de csak *párhuzamosak*. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok (egyik sem zérus!) párhuzamosságának a feltétele:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0.$$

e) $m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (m\,\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(m\,\boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$.

Ez utóbbi két egyenletben — mint általában minden vektoriális szorzatot tartalmazó egyenletben — ügyelni kell a tényezők sorrendjére.

8. Három vektor vegyes szorzata

a) Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — ebben a sorrendben adott — vektorok *vegyes szorzatát* úgy értelmezzük, mint az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektoriális szorzatának a $\boldsymbol{c}$-vel való skaláris szorzatát:

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

A vegyes szorzat tehát skaláris mennyiség, melynek értéke egyenlő az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok által kifeszített *paralelepipedon köbtartalmának* előjeles mérőszámával. Az előjel pozitív, ha $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ hegyesszöget zárnak be, vagyis, ha $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ ebben a sorrendben jobb rendszert képeznek.

b) A vegyes szorzat előjelén és nagyságán nem változtat sem a tényezőknek a ciklikus permutációja, sem az, hogy hogyan helyezzük el a három tényező közé a vektoriális szorzás jelét és a hozzátartozó zárójelet, valamint a skaláris szorzás jelét:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = \\ &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \\ &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \\ &= (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \\ &= -\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a} = -\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

c) Az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{c}$ vektorok *komplanárisak*, ha

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} = 0.$$

9. Hármas vektorszorzat kifejtési tétele

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}.$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}.$$

10. Négyes vektorszorzatok

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{d}.$$

2. §. Vektorok felbontása a derékszögű koordináta-rendszerben

1. Vektorok felbontása a derékszögű koordináta-rendszerben

a) Az (x, y, z) jobb sodrású, Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer tengelyeinek irányában mutató egységvektorok: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Ezekre fennáll:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1; \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0;$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k} = 1.$$

b) A tér tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora:

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k},$$

ahol

$$x = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}, \quad y = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}, \quad z = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}.$$

2. A vektorokkal való műveletek elvégzése koordinátákkal

a)
$$\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k} = 0, \text{ ha}$$
$$a_x = a_y = a_z = 0.$$

b) Ha $\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{b} = b_x\,\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}$, akkor csak úgy lehet $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, ha

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

c) $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\,\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\,\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\,\boldsymbol{k}.$

$m\,\boldsymbol{a} = m\,a_x\,\boldsymbol{i} + m\,a_y\,\boldsymbol{j} + m\,a_z\,\boldsymbol{k}.$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\boldsymbol{k}.$$

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{a}| = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

3. Néhány alkalmazás az analitikus geometriában

a) Az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ helyvektorú P_1 és P_2 *pontok távolsága:*

$$|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| =$$
$$= +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

b) Az $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$ *helyvektor iránykoszinuszai:*

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

c) Az $\boldsymbol{r}_1$ helyvektorú P_1 ponton átmenő és $\boldsymbol{v}$ irányú *egyenes egyenlete:*

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = t\,\boldsymbol{v},$$

vagy ha $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_1 = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{v} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$, akkor

$$\begin{cases} x = x_1 + a\,t \\ y = y_1 + b\,t\,, \\ z = z_1 + c\,t \end{cases}$$

illetve

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

d) Az adott

$\boldsymbol{r}_1 = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}$ helyvektorú P_1 ponton átmenő és $\boldsymbol{n} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$ normálisú *sík egyenlete:*

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

vagy

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

e) A $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ pontokon átmenő *sík egyenlete:*

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0,$$

vagy

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. §. Koordináta-transzformációk

1. Párhuzamos eltolás

Az eredeti koordináta-rendszer tengelyeinek egységvektorai: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Az eltolt koordináta-rendszer tengelyeinek egységvektorai: $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$. Ezek között fennállnak a következő összefüggések: $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$. Ha a két kezdőpont viszonylagos helyzetét megadó vektor:

$$\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{d} = d_1\,\boldsymbol{i} + d_2\,\boldsymbol{j} + d_3\,\boldsymbol{k},$$

akkor

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d},$$

azaz

$$x' = x - d_1$$
$$y' = y - d_2$$
$$z' = z - d_3.$$

2. Origo körüli elforgatás

Az eredeti koordináta-rendszer $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ egységvektorai és az origo körül elforgatott koordináta-rendszer $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ egységvektorai között fennállanak a következő összefüggések:

$$\boldsymbol{i}' = \alpha_1\,\boldsymbol{i} + \alpha_2\,\boldsymbol{j} + \alpha_3\,\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{i} = \alpha_1\,\boldsymbol{i}' + \beta_1\,\boldsymbol{j}' + \gamma_1\,\boldsymbol{k}',$$
$$\boldsymbol{j}' = \beta_1\,\boldsymbol{i} + \beta_2\,\boldsymbol{j} + \beta_3\,\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j} = \alpha_2\,\boldsymbol{i}' + \beta_2\,\boldsymbol{j}' + \gamma_2\,\boldsymbol{k}',$$
$$\boldsymbol{k}' = \gamma_1\,\boldsymbol{i} + \gamma_2\,\boldsymbol{j} + \gamma_3\,\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{k} = \alpha_3\,\boldsymbol{i}' + \beta_3\,\boldsymbol{j}' + \gamma_3\,\boldsymbol{k}'.$$

Egy tetszőleges P pont helyvektora ($\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$):

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'.$$

A koordináták között fennálló összefüggések:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, & x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, & y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z', \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, & z &= \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned}$$

4. §. Determinánsok

1. Másodrendű determináns

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Harmadrendű determináns

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

ahol A_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó *előjeles aldetermináns*. Ezt az eredeti determinánsból úgy nyerjük, hogy annak i-edik sorát és k-adik oszlopát kitöröljük, és az így megmaradó, eggyel alacsonyabb rendű determinánst $(-1)^{i+k}$-val szorozzuk.

3. Determinánstételek

a) A determináns értéke nem változik, ha egy sorának elemeihez egy másik sorának tetszés szerinti, de közös λ-val szorzott elemeit hozzáadjuk.

b) Egy determináns értéke λ-val szorzódik, ha egy sorának minden elemét λ-val szorozzuk.

c) A determináns előjelet vált, ha két sorát felcseréljük.

d) A determináns értéke zérus, ha egy sorának minden eleme zérus.

e) A determináns értéke zérus, ha két sora megegyezik.

f) Ha egy determináns egyik sorát a saját elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor a szorzatok összege a determináns értékét adja. Ha viszont a determináns egyik sorát egy másik sor elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor e szorzatok összege zérussal egyenlő.

g) A determináns értéke nem változik, ha elemeit a főátlóra tükrözzük, vagyis a sorokat oszlopoknak és az oszlopokat soroknak írjuk.

h) Minden, a determináns soraira kimondott tétel oszlopaira is érvényes.

5. §. Lineáris egyenletrendszerek

1. Definíciók

a) Az n egyenletből álló és n ismeretlent tartalmazó *lineáris (első fokú) egyenletrendszer* általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Itt az a_{ik} együtthatók és a b_i abszolút (ismeretlent nem tartalmazó) tagok megadott állandók, míg az x_k-k az ismeretlenek.

b) Ha a b_i számok nem mindegyike zérus, akkor az egyenletrendszert *inhomogénnak*, ellenkező esetben, ha a b_i számok mindegyike zérus, akkor az egyenletrendszert *homogénnak* nevezzük.

c) Az adott *egyenletrendszert megoldani* annyit jelent, mint minden olyan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

mértékrendszert eghatározni, amely az egyenletrendszert kielégíti. Egy-egy ilyen értékrendszert az egyenletrendszer egy *megoldásának* nevezzük.

d) Az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns az *egyenletrendszer determinánsa.*

2. Inhomogén lineáris egyenletrendszer

a) Ha $A \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek egy és csakis egy megoldása van, mégpedig:

$$x_1 = \frac{B_1}{A}, \; x_2 = \frac{B_2}{A}, \; \ldots, \; x_n = \frac{B_n}{A} \quad (\textit{Cramer-szabály}),$$

ahol A az egyenletrendszer determinánsa, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pedig azok az n-ed rendű determinánsok, amelyeket az A-ból úgy nyerünk, hogy az első, második, ..., n-edik oszlopa helyébe az egyenletrendszer jobb oldalán álló b_i abszolút tagokat írjuk.

b) Ha $A = 0$, akkor az egyenletrendszerben két vagy több egyenlet egymásnak következménye, vagy két vagy több egyenlet egymásnak ellentmond. Ekkor az egyenletnek vagy végtelen sok megoldása van, vagy pedig egy sem.

3. Homogén lineáris egyenletrendszer

a) Ha $A \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek csak az

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

ún. *triviális megoldásáról* beszélhetünk.

b) Ha $A = 0$, akkor az egyenletrendszernek van a *triviálistól különböző megoldása* is, mégpedig végtelen sok. Ekkor ugyanis:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_{i1} : A_{i2} : \ldots : A_{in},$$

ahol az A_{ik} számok az egyenletrendszer A determinánsának az i-edik sorához tartozó előjeles aldeterminánsait jelölik, feltéve, hogy ezek nem mind zérussal egyenlők.

XIV. A VEKTORANALÍZIS ELEMEI

1. §. Egyparaméteres vektor-skalár függvények. Térgörbék

1. Alapfogalmak

a) Legyen az $\boldsymbol{r}$ vektor a skaláris t paraméter függvénye:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Ez a függvény a t skaláris független változó minden szóba jöhető értékéhez meghatározott $\boldsymbol{r}$ vektoriális függvényértékeket rendel hozzá. A függvény *értelmezési tartománya* a t változónak az az intervalluma $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$, mely tartalmazza mindazon t értékeket, amelyekhez $\boldsymbol{r}(t)$ függvényértékek tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi t értékéhez tartozó különböző $\boldsymbol{r}(t)$ vektorok összessége alkotja a függvény *értékkészletét*. Ha az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény az értelmezési tartomány minden t értékéhez csak egy vektort rendel hozzá, akkor azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ függvény *egyértékű*; különben *többértékű*.

b) Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Tehát az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ *vektor-skalár függvény* az

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

egyváltozós (skalár-skalár) függvényekből álló függvényrendszer tömörebb kifejezése.

c) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ függvénynek $t \to t_0$ határátmenet esetén van *határértéke*, és ez $\boldsymbol{r}_0$, ha fennáll:

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 ,$$

vagyis, ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ, hogy

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| < \varepsilon$$

legyen, hacsak $|t - t_0| < \delta$.

d) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ függvény a t_0 helyen *folytonos*, ha

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0).$$

e) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ vektor-skalár függvényt a különböző t értékekhez tartozó $\boldsymbol{r}(t)$ helyvektorok végpontjainak összességével *szemléltetjük*. Ha az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény egyértékű és folytonos, akkor a függvényt szemléltető pontok összessége egy folytonos *görbén*

(síkban *síkgörbén*, térben *térgörbén*) helyezkednek el. Ez a görbe az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény képe: *hodográfja*. E szemléltetés kapcsán kézenfekvő az az értelmezés, hogy az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2$$

vektor-skalár függvény a t értékeivel számozott számegyenes (t tengely) $t_1 \leqq t \leqq t_2$ szakaszát leképezi az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény által meghatározott görbének az $\boldsymbol{r}(t_1)$, $\boldsymbol{r}(t_2)$ helyvektorú pontok közötti szakaszára. Ha az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény által meghatározott görbe egyes pontjaihoz hozzáírjuk azokat a t értékeket, amelyek a megfelelő pontokat meghatározzák, egy *görbe vonalú skálát, számozott pontsort* kapunk.

2. Derivált

a) A t_0 paraméterérték környezetében értelmezett $\boldsymbol{r}(t)$ vektor-skalár függvény e helyen *differenciálható*, ha a független változó tetszőleges $\Delta t = t - t_0$ megváltozásához tartozik egy olyan Δt-től független és csak a t_0-tól függő $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ vektor, mellyel $\boldsymbol{r}(t)$ megváltozása $[\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)]$ így fejezhető ki:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\,\Delta t + \bar{\varepsilon}(t_0; \Delta t)\,\Delta t,$$

ahol

$$|\bar{\varepsilon}(t_0; \Delta t)| \to 0, \quad \text{hacsak} \quad \Delta t \to 0.$$

Az ezzel az összefüggéssel definiált $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ vektor az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény t_0 helyhez tartozó deriváltja.

b) Koordinátákban:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\,\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\,\boldsymbol{k}.$$

c) A differenciálható vektor-skalár függvény $\Delta \boldsymbol{r}$ megváltozásának a főrészét a függvény *differenciáljának* nevezzük:

$$d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt.$$

Ennek az értelmezésnek az alapján szokás a deriváltat így is jelölni:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}.$$

d) $\dot{\boldsymbol{r}} \neq 0$ esetén $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény által meghatározott görbe t_0 paraméterű pontjához tartozó *érintő vektorát* adja meg.

3. Térgörbe ívhossza

Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$ függvénnyel megadott L térgörbe *ívhossza* — feltéve, hogy $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ a szóban forgó intervallumban folytonos —

$$s = \int_L ds = \int_\alpha^\beta |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\;dt.$$

4. Az ívhossz mint paraméter

a) Ha az $\alpha \leqq t \leqq \beta$ intervallumban $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \neq 0$, akkor mivel

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt, \quad \frac{ds}{dt} = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|,$$

így $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \frac{ds}{dt} > 0$, azért az $s(t)$ függvény monoton növekvő, ennek folytán van egyértelműen meghatározott inverz függvénye: $t(s)$, más szóval a t paraméter kifejezhető az s ívhosszúság segítségével. Így

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,[t(s)] = \boldsymbol{r}(s).$$

b) $\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} = \boldsymbol{e}$, vagyis a helyvektor ívhosszúság szerinti deriváltja az érintő irányába mutató egységvektor.

5. Simulósík

A térgörbe $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ érintővektora és az $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ húrvektor által meghatározott sík $t \to t_0$ határátmenet esetén (feltéve, hogy $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ a t_0 helyen folytonos) meghatározott határhelyzethez tart. Ezt a síkot nevezzük a görbe t_0 pontbeli simulósíkjának. A *simulósík normálisa:*

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}.$$

6. Főnormális, görbület

A simulósíkban fekvő és az érintővektorra merőleges $\boldsymbol{r}''$ vektor a térgörbe *főnormálisát* határozza meg. Ha a főnormális egységvektorát $\boldsymbol{n}$-nel jelöljük, akkor

$$\boldsymbol{r}'' = \frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = g\,\boldsymbol{n},$$

ahol g a térgörbe *görbülete.*

7. Térgörbe kísérő triédere

a) Az érintőre és főnormálisra merőleges $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$ egységvektort *binormális* egységvektornak nevezik:

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}.$$

Az $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ vektorok a térgörbe *kísérő triéderét* alkotják.

b) $\boldsymbol{e}$ és $\boldsymbol{n}$ síkja a *simulósík*; normálisa: $\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{b}$ síkja a *normálsík*; normálisa: $\boldsymbol{e}$.

$\boldsymbol{e}$ és $\boldsymbol{b}$ síkja a *rektifikálósík*; normálisa: $\boldsymbol{n}$.

8. A torzió

$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -c\,\boldsymbol{n}$, ahol c az ún. *torzió*. A torzió nagysága arról tájékoztat, hogy milyen gyorsan változik a simulósík normálisának az iránya, mennyire tér el a vizsgált pont környezetében a görbe egy síkgörbétől.

9. Frenet-féle képletek

$$\boldsymbol{e}' = \frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \quad g\,\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{n}' = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -g\,\boldsymbol{e} + c\,\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{b}' = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \quad -c\,\boldsymbol{n}.$$

10. Térgörbe adatainak meghatározása általános esetben

Általános esetben a térgörbe nem az ívhossz függvényeként van megadva, tehát

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

ahol a t paraméter nem az ívhossz. Ebben az esetben így számolunk:

$$\boldsymbol{e} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}; \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}; \qquad \boldsymbol{n} = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times \dot{\boldsymbol{r}}}{|(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times \dot{\boldsymbol{r}}|};$$

$$g = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}; \qquad c = \frac{\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

2. §. Kétparaméteres vektor-skalár függvények. Felületek

1. Alapfogalmak

a) Legyen az $\boldsymbol{r}$ vektor a skaláris u és v paraméterek függvénye

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

Ez a függvény az (u, v) független változók minden szóba jöhető értékpárjához hozzárendel meghatározott $\boldsymbol{r}$ vektor függvényértékeket. A függvény *értelmezési tartománya* az (u, v) változóknak az a kétméretű T tartománya, mely tartalmazza mindazon (u, v) értékpárokat, amelyekhez $\boldsymbol{r}(u, v)$ vektorok tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi (u, v) értékpárjához tartozó különböző $\boldsymbol{r}(u, v)$ vektorok összessége alkotja a függvény *értékkészletét.* Ha az $\boldsymbol{r}(u, v)$ függvény minden (u, v) értékpárhoz csak egy $\boldsymbol{r}$ vektort rendel hozzá, akkor $\boldsymbol{r}(u, v)$ *egyértékű*; különben *többértékű.*

b) Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k}.$$

Tehát az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ *vektor-skalár függvény* az

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

kétváltozós (skalár-skalár) függvényekből álló függvényrendszer tömörebb kifejezése.

c) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ függvénynek $u \to u_0$, $v \to v_0$ határátmenet esetén van *határértéke,* és ez $\boldsymbol{r}_0$, ha fennáll:

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_0,$$

vagyis, ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ, hogy

$$|\boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{r}_0| < \varepsilon$$

legyen, hacsak $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$.

d) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ függvény az u_0, v_0 helyen *folytonos,* ha

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0).$$

e) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvényt a különböző (u, v) értékpárokhoz tartozó $\boldsymbol{r}(u, v)$ helyvektorok végpontjainak összességével *szemléltetjük*. Ha az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ függvény egyértékű és folytonos, akkor a függvényt szemléltető pontok összessége egy folytonos *felületen* helyezkedik el. E szemléltetés kapcsán kézenfekvő az az értelmezés, hogy az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény az (u, v) értékpárokkal meghatározott T síktartománybeli pontokat leképezi az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ függvény által meghatározott felület F darabjának a pontjaira. Az F felületdarab az (u, v) paramétersík T tartományának a képe.

f) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény egy-egy v = állandó értéknél az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v = \text{állandó})$$

egyparaméteres vektor-skalár függvénybe megy át. Ez pedig az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ felület egy felületi görbéje, ún. *u paramétervonala*. Az u paramétervonalak összessége az F felületdarabot egyszeresen beborítja. Ugyanerre a felületre esnek az egy-egy u = állandó értékhez tartozó

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u = \text{állandó}, v)$$

felületi görbék, e felületnek ún. *v paramétervonalai*. Ha mind u-nak, mind v-nek pl. egy-egy számtani haladvány elemeivel egyenlő értéksorozatot adunk, akkor az így nyert rendezett paramétervonalak a felület egy meghatározott darabját behálózzák (kétszeresen beborítják). Ez a felületi görbehálózat megfelel az (u, v) paramétersík koordinátavonal hálózatának. E szemlétetésre támaszkodva mondhatjuk, hogy a felület egyes pontjaihoz tartozó u és v értékek a felületi pontok *görbe vonalú koordinátái*.

g) Ha egy tetszőleges t paraméter közvetítésével, az

$$u = u(t)$$
$$v = v(t)$$

függvények útján, az u és v paraméterek között valamilyen függvénykapcsolatot adunk meg, akkor az

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}\,[\,u(t),\, v(t)]$$

egyparaméteres vektor-skalár függvény egy bizonyos *felületi görbét* határoz meg.

2. Deriváltak | a) Az (u_0, v_0) paraméter-értékpár környezetében értelmezett $\boldsymbol{r}(u, v)$ kétparaméteres vektor-skalár függvény e helyen *differenciálható,* ha a független változók tetszőleges $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$ megváltozásaihoz tartozik két olyan a Δu-tól és Δv-től független, és csak u_0-tól, v_0-tól függő $\boldsymbol{r}'_u(u_0, v_0)$, illetve $\boldsymbol{r}'_v(u_0, v_0)$ vektor, melyekkel $\boldsymbol{r}(u, v)$ megváltozása $[\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{r}(u_0, v_0)]$ így fejezhető ki:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'_u(u_0, v_0)\,\Delta u + \boldsymbol{r}'_v(u_0, v_0)\,\Delta v + \bar{\varepsilon}_1\,\Delta u + \bar{\varepsilon}_2\,\Delta v,$$

ahol $|\bar{\varepsilon}_1| \to 0$ és $|\bar{\varepsilon}_2| \to 0$, hacsak $\Delta u \to 0$ és $\Delta v \to 0$.

b) A Δr megváltozás fő része a függvény ún. *teljes differenciálja:*

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'_u\,du + \boldsymbol{r}'_v\,dv.$$

Ebben az összefüggésben szereplő $\boldsymbol{r}'_u$, $\boldsymbol{r}'_v$ vektorok a függvény u, illetve v szerinti *parciális derivált vektorai*:

$$\boldsymbol{r}'_u(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}; \qquad \boldsymbol{r}'_v(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}.$$

c) Koordinátákban:

$$\boldsymbol{r}'_u = x'_u \boldsymbol{i} + y'_u \boldsymbol{j} + z'_u \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}'_v = x'_v \boldsymbol{i} + y'_v \boldsymbol{j} + z'_v \boldsymbol{k}.$$

3. Érintősík, normális

a) Tegyük fel, hogy a felület $\boldsymbol{r}(u, v)$ helyvektorú P pontjában $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \neq 0$. (A felületet ilyen pontjában simának nevezzük.) E ponton átmenő u, illetve v paramétervonalak érintői párhuzamosak az $\boldsymbol{r}'_u$, illetve $\boldsymbol{r}'_v$ parciális deriváltvektorokkal.

b) Egy másik, tetszőleges, ugyancsak P-n átmenő

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[u(t), v(t)]$$

függvénnyel meghatározott felületi görbe érintője (hacsak $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \neq 0$), a

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}'_u \dot{u} + \boldsymbol{r}'_v \dot{v}$$

derivált vektorral párhuzamos. Tehát a P ponton átmenő valamennyi, érintővel bíró felületi görbe $\dot{\boldsymbol{r}}$ érintővektora egy síkba, az e ponton átmenő u és v paramétervonalak $\boldsymbol{r}'_u$ és $\boldsymbol{r}'_v$ érintővektorainak síkjába, a felület P-beli *érintősíkjába* esik. Az érintősíknak, azaz a felületnek e pontbeli normálisa, a *felületi normális vektora*:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v.$$

c) Ha a felület egyenlete speciálisan a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvénnyel van megadva, akkor az $u = x$, $v = y$ paraméterválasztás mellett:

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + f(x, y)\,\boldsymbol{k};$$

$$\boldsymbol{r}'_x = \boldsymbol{i} + f'_x \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{r}'_y = \boldsymbol{j} + f'_y \boldsymbol{k};$$

és így

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = -f'_x \boldsymbol{i} - f'_y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

vagy bevezetve az $f'_x = p$, $f'_y = q$ jelölést:

$$\boldsymbol{m} = -p\,\boldsymbol{i} - q\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

4. Felületdarab felszíne

a) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ függvénnyel meghatározott felület azon *F darabjának a felszíne*, mely az (u, v) sík T tartományához tartozik, feltéve, hogy e tartomány minden pontjában $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \neq 0$,

$$F = \iint_F dF = \iint_T |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\, du\, dv.$$

b) Ha speciálisan $z = f(x, y)$ alakban van megadva a felület, akkor az $f'_x = p$, $f'_y = q$ jelöléssel:

$$F = \iint_F dF = \iint_T \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy.$$

3. §. Skalár-vektor függvények, skalárterek

1. Alapfogalmak

a) Legyen az u változó skalár, az $\boldsymbol{r}$ változó vektor. Akkor az

$$u = u(\boldsymbol{r})$$

függvény az $\boldsymbol{r}$ független változó vektor minden szóba jöhető értékéhez hozzárendel meghatározott u skaláris függvényértékeket. Ezt a függvényt *skalár-vektor függvénynek* nevezzük. Ha $\boldsymbol{r}$ helyvektort jelöl, akkor az $u(\boldsymbol{r})$ függvény az u skalárértékeket a tér $\boldsymbol{r}$ helyvektorai által meghatározott pontjaihoz rendeli hozzá. A függvény *értelmezési tartománya* az az $\boldsymbol{r}$ helyvektor méretszámával megegyező méretű (dimenziójú) V tartomány, mely tartalmazza mindazon pontokat, melyekhez $u(\boldsymbol{r})$ függvényértékek tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi $\boldsymbol{r}$ vektorához tartozó különböző $u(\boldsymbol{r})$ értékek összessége alkotja a függvény *értékkészletét*. Ha az $u(\boldsymbol{r})$ függvény az értelmezési tartomány minden $\boldsymbol{r}$ helyvektorú pontjához csak egy u értéket rendel hozzá, akkor $u(\boldsymbol{r})$ *egyértékű*; különben *többértékű*.

b) Skalár-vektor függvénnyel lehet jellemezni skaláris mennyiségek, pl. hőmérséklet-, nedvesség-, légnyomás-, potenciál- stb. értékeknek sík- vagy térbeli eloszlását. Ezért az $u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvényt *skalármező, skalártér, skaláreloszlás* rövid jelének tekinthetjük. Ha speciálisan $u(\boldsymbol{r}) =$ állandó minden $\boldsymbol{r}$-re, akkor a skaláreloszlást *homogénnek* nevezzük. Egyébként a skaláreloszlás *inhomogén*.

c) Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

így

$$u = u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z).$$

Tehát $u(\boldsymbol{r})$ az $u(x, y, z)$ *többváltozós függvény* tömörebb kifejezése.

d) Az $u = u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvénynek $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0$ határátmenet esetén van *határértéke*, és ez u_0, ha fennáll:

$$\lim_{\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0} u(\boldsymbol{r}) = u_0,$$

azaz, ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ, hogy $|u(\boldsymbol{r}) - u_0| < \varepsilon$ legyen, hacsak $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| < \delta$.

e) Az $u = u(\boldsymbol{r})$ függvény az $\boldsymbol{r}_0$ helyen *folytonos*, ha

$$\lim_{\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0} u(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r}_0).$$

f) A folytonos és egyértékű $u = u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvényeket síkbeli $\boldsymbol{r}$ helyvektor esetén *szintvonalakkal*, térbeli $\boldsymbol{r}$ helyvektor esetén pedig *szintfelületekkel* (általában: *szintalakzatokkal*) *szemléltetjük*. Ezek az azonos u skalárértékű pontok geometriai helyei. Az $u = u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvény egy szintalakzatának az egyenlete tehát:

$$u(\boldsymbol{r}) = c, \quad \text{ahol} \quad c = \text{állandó}.$$

2. A gradiens vektor

a) Az $\boldsymbol{r}_0$ helyvektorú P_0 pont környezetében értelmezett $u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvény e pontban *differenciálható,* ha a független változó vektor tetszőleges $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ megváltozásához tartozik egy olyan $\Delta \boldsymbol{r}$-től független és csak az $\boldsymbol{r}_0$-tól függő $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ vektor, mellyel $u(\boldsymbol{r})$ megváltozása $\Delta u = u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r}_0)$ így fejezhető ki:

$$\Delta u = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0) \cdot \Delta \boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon} \cdot \Delta \boldsymbol{r},$$

ahol $|\bar{\varepsilon}| \to 0$, hacsak $|\Delta \boldsymbol{r}| \to 0$.

Az ezzel az összefüggéssel definiált $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ vektor az $u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvénynek $\boldsymbol{r}_0$ helyhez tartozó *deriváltja.* Ezt a vektort nevezzük a skalár-vektor függvény *gradiensének:*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{grad}\, u.$$

b) A differenciálható skalár vektor függvény Δu megváltozásának a fő része e függvény *differenciálja:*

$$du = \mathbf{grad}\, u \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Ennek alapján szokás a gradiens vektort szimbolikusan így is jelölni:

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{du}{d\boldsymbol{r}} = \frac{d}{d\boldsymbol{r}} u.$$

c) Térbeli Descartes-féle derékszögű koordinátákban:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k};$$

$$u = u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z);$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Így

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

Ha bevezetjük a szimbolikus *„nabla"-vektort* (*Hamilton-féle operátort;* az ezzel való formális szorzás differenciálási utasítást jelent):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k} = \frac{d}{d\boldsymbol{r}},$$

akkor írhatjuk:

$$\mathbf{grad}\, u = \nabla u.$$

d) A **grad** u vektor bármely pontban merőleges az azon a ponton áthaladó szintfelületre (szintvonalra), és a növekvő u értékeknek megfelelő irányba mutat. A ***grad*** u abszolút értéke az $u(\boldsymbol{r})$ függvény értékváltozási sebességét (lokális relatív értékváltozását) méri a szintfelületre (szintvonalra) merőleges irányban.

3. Irány menti derivált

Az $u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvénynek az $\boldsymbol{e}$ egységvektor által meghatározott s irányban vett ún. *irány menti deriváltja:*

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{e}.$$

Az irány menti derivált az $u(\boldsymbol{r})$ függvény értékváltozási sebességét (lokális relatív értékváltozását) méri az $\boldsymbol{e}$ egységvektor által kijelölt irányban.

4. Skalár-vektor függvény görbe menti integrálja

Ha az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta$$

vektor-skalár függvénnyel megadott rektifikálható, irányított L görbe egyes pontjaiban $u(\boldsymbol{r})$ folytonos, akkor e *skalár-vektor függvény* adott *görbe menti integrálja:*

$$\int_L u(\boldsymbol{r})\, ds = \int_L u(\boldsymbol{r})\, |d\boldsymbol{r}| = \int_\alpha^\beta u[\boldsymbol{r}(t)]\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt.$$

Ezt az integrált szokás még *ívhossz szerinti integrálnak* is nevezni.

5. Skalár-vektor függvény felszín-integrálja

Ha az $u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvény az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

függvény által meghatározott F felületdarab egyes pontjaiban folytonos, továbbá az F felületdarab megfelelője az (u, v) sík T tartománya, s ebben mindenütt $|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \neq 0$, akkor az $u(\boldsymbol{r})$ F felületdarabra kiterjesztett ún. *felszín integrálja:*

$$\iint_F u(\boldsymbol{r})\, dF = \iint_T u\,[\boldsymbol{r}(u, v)]\, |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\, du\, dv.$$

4. §. Vektor-vektor függvények. Vektorterek

1. Alapfogalmak

a) Legyen a $\boldsymbol{v}$ változó vektor az $\boldsymbol{r}$ független változó vektor függvénye:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}).$$

Ez a függvény egy *vektor-vektor függvény.* Ez a függvény a független változó $\boldsymbol{r}$ vektor minden szóba jöhető értékéhez hozzárendel meghatározott $\boldsymbol{v}$ vektorokat. Ha itt $\boldsymbol{r}$ helyvektort jelöl, akkor a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény a $\boldsymbol{v}$ vektorokat a síknak vagy térnek az $\boldsymbol{r}$ helyvektorok által meghatározott pontjaihoz rendeli hozzá. A függvény *értelmezési tartománya* az az $\boldsymbol{r}$ helyvektor méretszámával megegyező méretű (dimenziójú) T tartomány, mely tartalmazza mindazon pontokat, melyekhez $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektorok tartoznak. Az értelmezési tartomány valamennyi $\boldsymbol{r}$ vektorához tartozó különböző $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektorok összessége alkotja a függvény *értékkészletét.* Ha a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény az értelmezési tartomány minden $\boldsymbol{r}$ helyvektorú pontjához csak egy $\boldsymbol{v}$ vektort rendel hozzá, akkor $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *egyértékű*; különben *többértékű.*

b) Vektor-vektor függvénnyel lehet jellemezni vektoriális mennyiségek (pl. áramló folyadék sebessége, elektromos, mágneses erő stb.) sík- vagy térbeli (általában T tartománybeli) eloszlását. Ezért a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvényt *vektormező, vektortér, vektoreloszlás* rövid jelének tekinthetjük. Ha $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ = állandó, minden $\boldsymbol{r}$-re, a vektoreloszlást *homogénnek* nevezzük. Egyébként a vektoreloszlás *inhomogén*.

c) Térbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

s így

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(x, y, z) = p(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{i} + q(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{j} + r(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{k} =$$
$$= p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k}.$$

Tehát a (térbeli) *vektor-vektor függvény* tulajdonképpen egy *háromparaméteres (háromváltozós) vektor-skalár függvénynek*, vagy a

$$\begin{cases} p = p(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z) \\ q = q(\boldsymbol{r}) = q(x, y, z) \\ r = r(\boldsymbol{r}) = r(x, y, z) \end{cases}$$

skalár-vektor függvényrendszer, illetve *többváltozós (háromváltozós) skalár-skalár függvényekből álló függvényrendszer* tömörebb kifejezésének is felfogható.

d) A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvénynek az $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0$ határátmenet esetén van *határértéke*, és ez $\boldsymbol{v}_0$, ha fennáll:

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_0,$$

azaz, ha a tetszőleges kicsiny pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ, hogy $|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}_0| < \varepsilon$ legyen, hacsak $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| < \delta$.

e) A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény az $\boldsymbol{r}_0$ helyen *folytonos*, ha

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0).$$

f) A $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény *szemléltetését* többféleképpen lehet elképzelni (a következőkben egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ egyértékű):

1. A független változó $\boldsymbol{r}$ helyvektor minden egyes $\boldsymbol{r}$ értékének megfelelő ponthoz *hozzárendeljük* a neki megfelelő $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektort.

2. Mind a független, mind a függő változó vektort helyvektornak gondoljuk, és a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvényt úgy értelmezzük, hogy az a független változó $\boldsymbol{r}$ helyvektorokat (illetve az ezek által kijelölt pontokat) *leképezi* a függő változó $\boldsymbol{v}$ helyvektorokra (illetve az ezek által kijelölt pontokra). Más fogalmazásban: a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény az $\boldsymbol{r}$ helyvektorok egy nyalábját leképezi (transzformálja) a megfelelő $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ugyancsak helyvektor-nyalábra. Ha a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény folytonos, akkor az $\boldsymbol{r}$ helyvektor-nyalábnak a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ helyvektor-nyalábra való leképezését pl. úgy tehetjük szemléletessé, hogy az $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ független változó helyvektor egyik, pl. z koordinátájának különböző állandó értékeket adunk, s meghatározzuk azokat a felületeket, amelyeken azoknak a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(x, y, z$ = állandó) helyvektoroknak a végpontjai fekszenek, melyek a választott z = állandó értékekhez tartoznak. Ezek a felületek a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y,\ z$ = állandó) kétparaméteres vektor-skalár függvények által meghatározott képei a z = állandó, (x, y) síkkal párhuzamos koordinátasíkoknak.

3. Ha feltesszük, hogy a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{i} + q(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{j} + r(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{k}$ vektor-vektor függvény folytonos, akkor a $p(\boldsymbol{r})$, $q(\boldsymbol{r})$, $r(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvényeket külön-külön egy-egy *szintalakzat- (szintfelület-) sereggel* ábrázolhatjuk.

4. Az egyes $\boldsymbol{r}$ helyvektorokhoz hozzárendelt $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektorok terének szemléletes képét nyerjük (folytonos $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ esetén) akkor, ha *vektorvonalakat* rajzolunk: olyan vonalakat, melyek minden pontjában az érintő iránya megegyezik az ahhoz a ponthoz tartozó $\boldsymbol{v}$ vektor irányával. Megállapodunk továbbá abban — azért, hogy a vektortér egyes vektorainak irányán kívül, azok abszolút értékéről is szemléletes képünk legyen —, hogy a vektorvonalak sűrűségét arányosnak vesszük a vektortér vektorainak abszolút értékével: a tér egy tetszés szerinti pontjában a vektor nagyságát a szóban forgó pontban a vektor irányára merőlegesen elhelyezett egységnyi felületen áthaladó vektorvonalak száma adja meg.

A *vektorvonalak differenciálegyenlete:*
vektorosan:

$$d\boldsymbol{r} = d\lambda\,\boldsymbol{v}, \quad \text{vagy} \quad \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = 0;$$

koordinátákkal kifejezve:

$$dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k} = d\lambda(p\,\boldsymbol{i} + q\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k});$$

skaláris differenciálegyenlet-rendszer alakjában:

$$dx = d\lambda\,p, \quad dy = d\lambda\,p, \quad dz = d\lambda\,r,$$

vagy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{r}{p}.$$

2. Derivált

a) Legyen $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$, és ennek megváltozása $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\,\boldsymbol{i} + \Delta y\,\boldsymbol{j} + \Delta z\,\boldsymbol{k}$; továbbá $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{i} + q(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{j} + r(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{k}$ és ennek a $\Delta\boldsymbol{r}$-hez tartozó megváltozása: $\Delta\boldsymbol{v} = \Delta p\,\boldsymbol{i} + \Delta q\,\boldsymbol{j} + \Delta r\,\boldsymbol{k}$. Tegyük fel továbbá, hogy $p(\boldsymbol{r})$, $q(\boldsymbol{r})$, $r(\boldsymbol{r})$ differenciálható skalár-vektor függvények, azaz

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta z\right) + (\varepsilon_{11}\Delta x + \varepsilon_{12}\Delta y + \varepsilon_{13}\Delta z) =$$

$$= \mathbf{grad}\,p \cdot \Delta\boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{r},$$

$$\Delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial q}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial q}{\partial z}\Delta z\right) + (\varepsilon_{21}\Delta x + \varepsilon_{22}\Delta y + \varepsilon_{23}\Delta z) =$$

$$= \mathbf{grad}\,q \cdot \Delta\boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon}_2 \cdot \Delta\boldsymbol{r},$$

$$\Delta r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial r}{\partial z}\Delta z\right) + (\varepsilon_{31}\Delta x + \varepsilon_{32}\Delta y + \varepsilon_{33}\Delta z) =$$

$$= \mathbf{grad}\,r \cdot \Delta\boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon}_3 \cdot \Delta\boldsymbol{r},$$

ahol $|\bar{\varepsilon}_1| \to 0$, $|\bar{\varepsilon}_2| \to 0$, $|\bar{\varepsilon}_3| \to 0$, hacsak $|\Delta\boldsymbol{r}| \to 0$.

Ennek figyelembevételével:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(\text{grad}\, p \cdot \Delta \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}(\text{grad}\, q \cdot \Delta \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{k}(\text{grad}\, r \cdot \Delta \boldsymbol{r}) +$$
$$+ \boldsymbol{i}(\bar{\varepsilon}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}(\bar{\varepsilon}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{k}(\bar{\varepsilon}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{r}).$$

Ha megállapodunk abban, hogy az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ *diadikus szorzatán*, röviden az $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ *diádon* egy olyan mennyiséget értünk, melynek egy $\boldsymbol{c}$ vektorral való skaláris szorzata a következő asszociatív tulajdonsággal bír:

$$(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}),$$

illetve

$$\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b},$$

akkor $\Delta \boldsymbol{v}$-t így írhatjuk:

$$\Delta \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i} \circ \text{grad}\, p + \boldsymbol{j} \circ \text{grad}\, q + \boldsymbol{k} \circ \text{grad}\, r) \cdot \Delta \boldsymbol{r} +$$
$$+ (\boldsymbol{i} \circ \bar{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{j} \circ \bar{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{k} \circ \bar{\varepsilon}_3) \cdot \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{D} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{r}.$$

Ezeket a jelöléseket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény egy $\boldsymbol{r}$ helyvektorú pontban akkor *differenciálható*, ha megadható egy a $\Delta \boldsymbol{r}$-től független és csak az $\boldsymbol{r}$-től függő $\boldsymbol{D}$ mennyiség, hogy a $\Delta \boldsymbol{v}$ függvényérték-változás ezzel így legyen kifejezhető:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} \cdot \Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{r},$$

ahol $|\boldsymbol{E}| \to 0$, hacsak $|\Delta \boldsymbol{r}| \to 0$. Az ezzel az összefüggéssel definiált $\boldsymbol{D}$ mennyiséget nevezzük a vektor-vektor függvény *deriválttenzorának*. A $\boldsymbol{D}$ *deriválttenzor* részletesen kifejtett alakja *diádok összegeként* így írható:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{i} \circ \text{grad}\, p + \boldsymbol{j} \circ \text{grad}\, q + \boldsymbol{k} \circ \text{grad}\, r =$$
$$= \boldsymbol{i} \circ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) +$$
$$+ \boldsymbol{j} \circ \left(\frac{\partial q}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial q}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial q}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) +$$
$$+ \boldsymbol{k} \circ \left(\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) =$$
$$= \boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \boldsymbol{i} \circ \boldsymbol{k}\frac{\partial p}{\partial z} +$$
$$+ \boldsymbol{j} \circ \boldsymbol{i}\frac{\partial q}{\partial x} + \boldsymbol{j} \circ \boldsymbol{j}\frac{\partial q}{\partial y} + \boldsymbol{j} \circ \boldsymbol{k}\frac{\partial q}{\partial z} +$$
$$+ \boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{k}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

A $\boldsymbol{D}$ deriválttenzort eszerint három vektorkoordináta, illetve kilenc skaláris koordináta jellemzi. Ezt a kilenc skaláris koordinátát, mely a választott koordináta-rend-

szerben egyértelműen meghatározza $\boldsymbol{D}$-t, szokás a következő *matrix* alakjában összefoglalni:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Ez a matrix a fenti részletes kiírásban szereplő diádok összegét egyértelműen reprezentálja.

b) A $\Delta \boldsymbol{v}$ megváltozás főrésze a függvény *differenciálja:*

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Ennek alapján a $\boldsymbol{D}$ deriválttenzort szokás szimbolikusan így is jelölni:

$$\boldsymbol{D} = \frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}.$$

3. Divergencia, rotáció

Az alkalmazások szempontjából fontos szerepet játszik a $\boldsymbol{D}$ deriválttenzor ún. *skalárinvariánsa* és kétszeres *vektorinvariánsa:* a vektor-vektor függvény *divergenciája* és *rotációja.*

Divergencia:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Rotáció:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}.$$

4. Vektor-vektor függvény görbe menti integrálja

Ha a rektifikálható, irányított L görbét $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$ vektor-skalár függvény határozza meg, és

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

e görbe pontjaiban folytonos, akkor ennek az adott L *görbe menti integrálja:*

$$\int_L \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{p\,[x(t), y(t), z(t)]\,\dot{x}(t) + q\,[x(t), y(t), z(t)]\,\dot{y}(t) + r\,[x(t), y(t), z(t)]\,\dot{z}(t)\}\,dt =$$

$$= \int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz).$$

5. Vektor-vektor függvény felületi integrálja

Tartozzék az (u, v) sík T tartományához az $\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k}$ kétparaméteres vektor-skalár függvény által meghatározott F felületdarab, s ezen mindenütt $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \neq 0$. Legyen továbbá a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

vektor-vektor függvény az F felületdarabon mindenütt folytonos. Akkor a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvénynek az adott, irányított F *felületdarab menti integrálja:*

$$\iint_F \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = \iint_T \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)\, du\, dv = \iint_T \left\{ p \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + q \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + r \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} du\, dv.$$

6. Vektor-vektor függvény skaláris potenciálja

Ha az egyszeresen összefüggő V térrészben

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \equiv 0,$$

akkor van olyan egyértékű $u = u(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvény — a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény ún. *skaláris potenciálja* — mely a

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$$

egyenlet szerint függ össze a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvénnyel. Ebben az esetben a $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvénynek bármely, a V belsejében futó zárt görbe mentén vett integrálja zérus, vagyis a görbe menti integrál független az integrálás útjától, és értéke csak ennek kezdő- és végpontjától függ. Ha az $\boldsymbol{a}$ rögzített vektor végpontját az $\boldsymbol{r}$ változó vektor végpontjával összekötő L görbe a V térrészben fut, akkor

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + \text{állandó}.$$

7. Gauss—Osztrogradszkij-féle tétel

Legyen a V zárt térbeli tartományban és annak határán $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ a deriválttenzorával együtt folytonos, és határolja ezt a V térrészt az F felület, akkor

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \iint_F \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f},$$

ahol az F felületmenti integrált úgy kell számítani, hogy a felületi normális a zárt térrészből kifelé mutasson.

8. Síkbeli Gauss—Osztrogradszkij-féle tétel

Legyen az L zárt görbe által határolt T síkbeli tartományban és magán az L görbén $p(x, y)$ és $q(x, y)$ folytonosan differenciálható, s válasszuk az L görbe irányítását úgy, hogy körüljárásakor a T tartomány bal kéz felé essék, akkor:

$$\iint_T \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_L (-p\, dx + q\, dy).$$

9. Green tétele a) Legyen a V zárt térbeli tartományban és annak határán értelmezett két folytonos függvény: $u(x, y, z)$ és $v(x, y, z)$, melyeknek folytonos első- és másodrendű parciális deriváltjaik vannak. Ekkor

$$\iiint_V (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz = \iint_F \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dF,$$

ahol Δ az ún. *Laplace-féle operátor:*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

és $\frac{\partial v}{\partial n}$, illetve $\frac{\partial u}{\partial n}$ jelenti a v, illetve u függvénynek a V-ből kifelé mutató felületi normális irányában vett deriváltját.

b) Legyen $u(x, y)$ és $v(x, y)$ két, az L pozitív körüljárásának megfelelően irányított peremgörbével rendelkező T síkbeli tartományban és annak határán értelmezett, folytonos első- és másodrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény. Ekkor

$$\iint_T (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy = \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

ahol Δ az ún. *Laplace-féle operátor:*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

és $\frac{\partial v}{\partial n}$, illetve $\frac{\partial u}{\partial n}$ jelenti a v, illetve u függvénynek L-nek a T-ből kifelé mutató normálisa mentén vett deriváltját.

10. Stokes tétele Legyen L egy szakaszonként sima, irányított zárt térgörbe, és F egy erre kifeszített felületdarab, melynek normálisa folytonos, vagy szakaszonként folytonos, és képezzen a peremgörbe irányításával jobbrendszert. Legyen továbbá az F felületet és L peremgörbéjét tartalmazó térrészben a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény a deriválttenzorával együtt folytonos. Ekkor

$$\iint_F \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

XV. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Definíciók, alapfogalmak

1. Definíció, osztályozás

a) Egy olyan egyenletet, melyben állandókon kívül egy (vagy több) független változó, ennek (vagy ezeknek) valamilyen ismeretlen függvénye (vagy függvényei) és ennek a függvénynek (vagy függvényeknek) a független változó (vagy változók) szerinti közönséges (vagy parciális) deriváltja vagy deriváltjai szerepelnek, *differenciálegyenletnek* nevezzük.

b) Ha a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény egyváltozós, s így ennek a független változó szerinti ún. közönséges deriváltjai lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük.

c) Ha a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény két- vagy többváltozós, s így ennek a független változók szerinti parciális deriváltjai lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük.

d) Ha az ismeretlen függvények száma egynél több, akkor — az ismeretlen függvények meghatározhatósága feltételének megfelelően — az ismeretlen függvények számával egyenlő számú differenciálegyenletből álló, ún. (közönséges vagy parciális aszerint, hogy az ismeretlen függvények egy- vagy többváltozósak) *differenciálegyenlet-rendszerrel* van dolgunk.

e) A differenciálegyenlet *rendszámát* a benne szereplő legmagasabb rendű derivált határozza meg. Ennek megfelelően beszélünk elsőrendű, másodrendű, . . . , n-ed rendű közönséges (vagy parciális) differenciálegyenletről (vagy differenciálegyenlet-rendszerről).

f) Ha a differenciálegyenlet (vagy differenciálegyenlet-rendszer) olyan, hogy — esetleg megengedett átrendezés után — az ismeretlen függvény (vagy függvények) és ennek (vagy ezeknek) deriváltjai csak első hatványon szerepelnek benne, és ezek szorzatai nem lépnek fel, akkor a differenciálegyenlet (vagy differenciálegyenlet-rendszer) *lineáris* — ellenkező esetben *nem lineáris*.

2. Differenciálegyenletek megoldásai

a) Egy *differenciálegyenletet megoldani* annyit jelent, mint meghatározni mindazokat a függvényeket, amelyek deriváltjaikkal együtt az adott differenciálegyenletet azonosan kielégítik. Ezek a függvények a differenciálegyenlet megoldásai. A differenciálegyenletek elméletének alapfeladata adott differenciálegyenlet összes megoldásainak keresése és ezen megoldások sajátságainak vizsgálata. Mivel a differenciálegyenletek megoldását általában integrálokra vezetjük vissza, a megoldást szokás a *differenciálegyenlet integráljának* nevezni, magát a differenciálegyenlet megoldásainak megkeresését a *differenciálegyenlet integrálásának.*

b) A differenciálegyenletek megoldásai között megkülönböztetünk *általános megoldást* és *partikuláris megoldásokat*, más szempont szerint *reguláris* (vagy *közönséges*) és *szinguláris megoldásokat*.

c) Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet *általános megoldása* az a differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvény, mely pontosan n tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz.

d) Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet *partikuláris megoldásai* olyan, a differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvények, melyek legfeljebb $n-1$ tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaznak. Speciális esetben a partikuláris megoldások egyetlen paramétert sem tartalmaznak. Általában az általános megoldás tartalmazza a differenciálegyenlet összes partikuláris megoldásait. Ez esetben, ha az általános megoldásban szereplő állandóknak meghatározott értékeket adunk, kapjuk a differenciálegyenlet partikuláris megoldásait.

e) A differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldásának kiválasztásához szükséges bizonyos *kezdeti feltételeket* vagy — elsőnél magasabbrendű differenciálegyenletnél — *kerületi (határ-) feltételeket* megadni. Az ezek alapján meghatározott partikuláris megoldásról azt mondjuk, hogy az az adott kezdeti, illetve kerületi feltételeket kielégítő partikuláris megoldás.

f) Ha az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény összes argumentumainak egy D zárt tartományhoz tartozó bármely x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$ értékrendszeréhez egy és csakis egy olyan $y = y(x)$ függvény tartozik, mely az adott differenciálegyenletet azonosan és a megadott kezdeti feltételeket is kielégíti *(unicitás feltételes)*, akkor az az $y(x)$ függvény a differenciálegyenlet *reguláris* (vagy *közönséges*) *megoldása*. A differenciálegyenlet reguláris megoldásának minden pontjában a jobboldali f függvénynek folytonosnak és korlátosnak kell lennie, és ezenkívül összes argumentumaira vonatkozólag ki kell elégítenie az alábbi, ún. *Lipschitz-feltételt:*

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})| \leqq$$

$$\leqq M\{|y-\bar{y}| + |y'-\bar{y}'| + |y''-\bar{y}''| + \dots + |y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}|\},$$

ahol M egy pozitív állandó.

g) Egy differenciálegyenlet olyan megoldását, mely egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének, *szinguláris megoldásnak* nevezzük. Ennek értelmében egy szinguláris megoldás bármely (x, y) pontjának tetszőleges környezetében legalább két olyan integrálgörbe létezik, mely e ponthoz tartozó, megadott kezdeti feltételeket kielégíti.

2. §. Elemi integrálási módszerek elsőrendű közönséges differenciálegyenleteknél

1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

a) $y' = f(x); \quad y = \int f(x)\, dx + C.$

b) $y' = f(y); \quad x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$

c) $y' = f(x)\, g(y)$; $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C.$

d) $M(x)\, N(y)\, dx + P(x)\, Q(y)\, dy = 0$; $\displaystyle\int \frac{M(x)}{P(x)}\, dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\, dy = C.$

2. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciál-egyenletek

a) $y' = f(a\,x + b\,y + c)$, ahol

$$a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Új változót vezetünk be: $u(x) = a\,x + b\,y(x) + c$.

Ezzel

$$x = \int \frac{du}{a + b\, f(u)} + C.$$

b) *Homogén (fokszámú) differenciálegyenlet:* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, ahol $x \neq 0$.

Új változót vezetünk be: $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

Ezzel:

$$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C.$$

3. Elsőrendű lineáris és erre visszavezethető differenciál-egyenletek

a) *Homogén lineáris differenciálegyenlet:* $y' + g(x)\, y = 0$;

$$y = C\, e^{-\int g(x)\, dx}$$

b) *Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet:* $y' + a\,y = 0$;

$$y = C\, e^{-ax}.$$

c) *Inhomogén lineáris differenciálegyenlet:* $y' + g(x)\, y = h(x)$, ahol $h(x) \not\equiv 0$; először megoldjuk az $Y' + g(x)\, Y = 0$ homogén lineáris differenciálegyenletet; ennek az általános megoldása: $Y = C\, Y_1$; az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy y_0 partikuláris megoldását az *állandó variálásának* módszerével keressük, $y_0 = C(x) \cdot Y_1$ alakban; az eredeti egyenlet általános megoldása: $y = Y + y_0$.

d) *Bernoulli-féle differenciálegyenlet:* $y' + g(x)\, y = h(x)\, y^n$, ahol $n \neq 1$ és $h(x) \not\equiv 0$. Új változót vezetünk be: $u(x) = [y(x)]^{1-n}$; ezzel lineárisra vezethető vissza.

4. Egzakt differenciál-egyenlet; integráló tényező

a) A $p(x, y) + q(x, y)\, y' = 0$ differenciálegyenlet egzakt, ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} \equiv \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Ebben az esetben az általános megoldás:

$$\int p(x, y)\, dx + \int \left\{ q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y)\, dx \right\} dy = C,$$

vagy

$$\int q(x, y)\, dy + \int \left\{ p(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int q(x, y)\, dy \right\} dx = C.$$

b) A $\mu(x, y) \not\equiv 0$ függvény *integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)*, ha a

$$\mu(x, y) \cdot p(x, y) + \mu(x, y) \cdot q(x, y)\, y' = 0$$

differenciálegyenlet egzakt. Ennek a feltétele:

$$q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - p(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x, y) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right).$$

5. Közelítő módszerek

a) *Sorozatos közelítés.* Legyen az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x, y)$ függvény az

$$|x - x_0| < a \leqq \infty, \quad |y - y_0| < b \leqq \infty$$

tartományban folytonos és korlátos, azaz

$$|f(x, y)| \leqq A,$$

továbbá ugyanott tegyen eleget az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq M |y_2 - y_1|$$

Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\, dx,$$

. . . .

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\, dx,$$

. . . .

függvénysorozat $n \to \infty$ esetén — legalább az

$$|x - x_0| < \min \left(a, \frac{b}{A} \right)$$

intervallumban — az adott differenciálegyenletnek, az $y_0 = y(x_0)$ adott kezdeti feltételt kielégítő, $y = y(x)$ megoldásához konvergál.

Az n-edik közelítésre fennáll, hogy

$$|y_n(x) - y(x)| \leqq \frac{A}{M} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^k |x - x_0|^k}{k!} .$$

Ez az eljárás numerikus, közelítő számolásra is alkalmas. Ez esetben a jobb oldalon álló egyes integrálok kiszámítására numerikus, közelítő módszert kell alkalmaznunk.

b) Közelítő megoldás *hatványsor alakjában.* Ha az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény az

$$|x - x_0| < a \leqq \infty, \quad |y - y_0| < b \leqq \infty$$

tartományban folytonos és korlátos, azaz $|f(x, y)| \leqq A$, és továbbá az

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

alakban hatványsorba fejthető, akkor az adott differenciálegyenletnek az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltételt kielégítő, $y = y(x)$ megoldása az $x = x_0$ hely környezetében az

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

hatványsor alakjában előállítható. Ez a hatványsor legalább az

$$|x - x_0| \leqq \min \left(a, \frac{b}{A} \right)$$

intervallumban konvergens. A határozatlan együtthatókat a differenciálegyenletbe való behelyettesítés útján összehasonlítással határozhatjuk meg.

3. §. Speciális típusú másodrendű differenciálegyenletek

1. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

a) $y'' = f(x)$. Közvetlenül kvadratúrákkal megoldható.

b) A differenciálegyenletből y hiányzik:

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Elsőrendűre redukálható az

$$y' = p, \quad y'' = p'$$

helyettesítéssel.

c) A differenciálegyenletből x hiányzik:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Elsőrendűre redukálható az

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy} p$$

helyettesítéssel.

2. Másodrendű lineáris differenciál-egyenletek

Általános alak:

$$y'' + f_1(x)\,y' + f_2(x)\,y = f_3(x).$$

Ennek az általános megoldását általában nem tudjuk meghatározni. Ha azonban ismeretes a megfelelő

$$Y'' + f_1(x)\,Y' + f_2(x)\,Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása: Y_1, akkor az adott inhomogén lineáris differenciálegyenletet az

$$y = u(x)\,Y_1$$

helyettesítéssel hiányos másodrendűre lehet visszavezetni.

4. §. Lineáris differenciálegyenletek

1. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

Az n-ed rendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x),$$

ahol az $a_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ együtthatók és $f(x)$ az $\alpha < x < \beta$ intervallumban folytonos függvények és $a_n(x) \not\equiv 0$. Ha $f(x) \equiv 0$, akkor az egyenlet *homogén,* különben *inhomogén lineáris.*

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása szorosan összefügg az ugyanazon bal oldallal bíró

$$a_n(x)\,Y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,Y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)\,Y'' + a_1(x)\,Y' + a_0(x)\,Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásával. Ennek az általános megoldása, ha $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ egymástól lineárisan független n darab partikuláris megoldás, a következő:

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet y általános megoldása mármost egy y_0 partikuláris megoldásnak és a homogén egyenlet Y általános megoldásnak összege:

$$y = y_0 + Y = y_0 + c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n.$$

Az $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ megoldásokat általában nem tudjuk előállítani, ha azonban ezeket ismerjük, akkor y_0 meghatározható az *állandók variálásának módszerével.* E célból keressük y_0-t az

$$y_0 = c_1(x)\,Y_1 + c_2(x)\,Y_2 + \dots + c_n(x)\,Y_n$$

alakban. A $c_k(x)$ függvények deriváltjai a következő lineáris egyenletrendszerből számíthatók ki:

$$c_1' Y_1 + c_2' Y_2 + \dots \qquad + c_n' Y_n = 0$$
$$c_1' Y_1' + c_2' Y_2' + \dots \qquad + c_n' Y_n' = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_1' Y_1^{(n-2)} + c_2' Y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' Y_n^{(n-2)} = 0$$

$$c_1' Y_1^{(n-1)} + c_2' Y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' Y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_n(x)}.$$

Mivel az Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények egymástól lineárisan függetlenek, ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható az ismeretlen $c_k(x)$ függvények deriváltjaira. Ezekből pedig integrálással kapjuk a $c_k(x)$ függvényeket.

2. Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet

Az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$(a_n \neq 0)$ állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x},$$

ahol

$$\lambda_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

az

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei ($\lambda_i \neq \lambda_k$, ha $i \neq k$).

Ha azonban $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$ $(m \leqq n)$, akkor a megoldás megfelelő része:

$$(c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1}) e^{\lambda_1 x}.$$

A komplex gyökpároknak megfelelő rész valós alakban írható a következő mintára: Ha

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

akkor az általános megoldásban szereplő

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

tagok helyett — az Euler-féle összefüggések alapján — írható:

$$e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Ha a komplex gyökpárok is többszörösek $\left(m \leqq \frac{n}{2}\right)$, azaz pl.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \alpha + i\beta,$$
$$\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \ldots = \lambda_{2m} = \alpha - i\beta,$$

akkor a megoldás megfelelő része helyett valós alakban írhatjuk:

$$e^{\alpha x} \{(c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1}) \cos \beta x + (c_{m+1} + c_{m+2} x + \ldots + c_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x\}.$$

3. Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása kísérletező feltevéssel

Ha az állandó együtthatójú

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x)$ függvény csak olyan tagokból áll, melyeknek csak véges számú lineárisan független deriváltjaik vannak, akkor az állandók variálásának hosszadalmas módszere helyett az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását *kísérletező feltevéssel* határozhatjuk meg. Ilyen függvények:

$$\alpha e^{\alpha x}; \quad \alpha \cos \beta x; \quad \alpha \sin \beta x; \quad \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

vagy ezek tetszőleges lineáris kombinációja.

Mindenekelőtt összeírjuk az $f(x)$ függvényben szereplő tagokat és különböző deriváltjaikat (az állandó együtthatók nélkül). Ha ezek közül egyik sem szerepel az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet megoldásai között, akkor ezeknek lineáris kombinációja alakjában kereshetjük az y_0 megoldást.

Ha az előbb említett függvények közül némelyek szerepelnek a homogén rész megoldásai között, akkor mindenekelőtt úgy osztjuk csoportokba az előbb említett függvényeket, hogy egy-egy csoporton belül az egymásból deriválással származtatott tagok legyenek. Ha ezen csoportok valamelyikének egyik tagja a homogén rész megoldása, akkor ennek a csoportnak mindegyik tagját megszorozzuk x-nek azzal a legkisebb kitevőjű hatványával, mellyel megszorozva, már e csoport valamennyi tagja különbözni fog a homogén rész megoldásaitól. A próbafüggvényben azután ezekkel a tagokkal helyettesítjük a szóban forgó csoport eredeti tagjait.

4. Euler-féle lineáris differenciálegyenlet

Az

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 y'' + \\ + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

differenciálegyenlet — melyben az a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) együtthatók állandók, az $x = e^t$ helyettesítéssel állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletre redukálható.

Alkalmazhatjuk az $Y = x^\lambda$ kísérletező feltevést is!

IRODALOMJEGYZÉK

1. *A. F. Bermant:* Matematikai analízis I—II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)

2. *M. K. Grebencsa—Sz. I. Novoszelov:* Matematikai analízis I—II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951, 1952.)

3. *R. Rothe:* Höhere Mathematik I—V. (Teubner, Leipzig, 1953.)

4. *G. Grüss:* Differential- und Integralrechnung. (A. V. G. Leipzig, 1949.)

5. *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei I—II. (Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951.)

6. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan. (Budapest, 1944.)

7. *R. Courant:* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I—II. (Springer, Berlin, 1931.)

8. *H. Mangoldt—K. Knopp:* Einführung in die höhere Mathematik I—III. (S. Hirzel, Leipzig, 1954.)

9. *M. J. Smirnow:* Lehrgang der höheren Mathematik I—III. (D. V. der W. Berlin, 1953—1955.)

10. *B. Baule:* Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs I—VII. (S. Hirzel, Leipzig, 1950—1953.)

11. *G. Joos—Th. Kaluza:* Höhere Mathematik für den Praktiker. (J. A. Barth, Leipzig, 1952.)

12. *J. N. Bronstein—K. A. Szemengyajev:* Matematikai zsebkönyv. (Művelt Nép, Budapest, 1955.)

Raktári szám: 44 331/VI.

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató
Újranyomásra előkészítette: Szelke Erzsébet
Műszaki vezető: Gonda Pál
Műszaki szerkesztő: ifj. Szilágyi Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. március — Megjelent: 1966. október
Példányszám: 3000 — Terjedelem: 14 (A/5) ív
Készült: az 1964. évi harmadik kiadás alapján, matrica felhasználásával, íves magasnyomással,
az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
66.657 Egyetemi Nyomda, Budapest